



Conceptos de la Teoría de Conjuntos

En el problema anterior se han mencionado algunos conceptos que es necesario definir con más precisión.

Conjunto: Es un concepto intuitivo, es decir, no podemos definirlo como tal, pero se refiere a la agrupación de elementos bajo algún criterio. Por ejemplo, los meses del año, los días de la semana, los estudiantes de un grupo de colegio, los trabajadores de una fábrica, los números enteros, etc. Utilizando la simbología de la Teoría de Conjuntos, un conjunto puede expresarse utilizando llaves, de la siguiente forma:

$$S = \{ \text{dom, lun, mar, mié, jue, vie, sáb} \}$$

$$E = \{ \text{lun, mar, mié, jue, vie} \} \quad F = \{ \text{sáb, dom} \}$$

Elemento: Se le llama así a cada uno de los objetos, personas, animales, días, números, ... que conforman el conjunto. En el problema anterior, todos los días de la semana son los elementos de S .

Cardenalidad: Es la cantidad de elementos que tiene un conjunto, si estos pueden contarse. Por ejemplo, la cardenalidad de S es 7, simbólicamente escribimos:

$$n(S) = 7$$

Si un conjunto tiene cardenalidad, le llamaremos **finito**; si no se puede establecer su cardenalidad, le llamaremos **infinito**.

Conjunto Universo: Es el conjunto que contiene a todos los elementos a los que se hace referencia en una situación particular. En el problema, S es el conjunto universo, porque contiene a todos los días de la semana.

Conjunto Vacío: Es el conjunto que no tiene ningún elemento. Puede simbolizarse con $\emptyset$, o con las llaves vacías: $\{ \}$. El conjunto que contiene los días entre semana y el fin de semana, es un ejemplo de conjunto vacío.

Notaciones de un conjunto: Un conjunto puede representarse gráficamente utilizando figuras geométricas, a esto se le conoce como *Diagrama de Venn*. También pueden representarse por **extensión**, escribiendo todos los elementos que contiene; o por **compresión**, escribiendo la característica que cumplen sus elementos, veamos:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{array} = \{ 1, 3, 5, 7, 9, \dots \} = \{ x / x \text{ es impar} \}$$

Diagrama
de Venn

notación
por extensión

notación
por compresión



Relaciones entre conjuntos

En todo conjunto existen relaciones de pertenencia entre sus elementos, y relaciones de inclusión entre sus subconjuntos.

Relaciones de pertenencia: Se dice que un elemento pertenece a un conjunto cuando éste elemento forma parte del conjunto. Para indicar que un elemento o número pertenece a un conjunto, utilizamos el signo $\in$ (pertenece), y si no pertenece se utiliza el signo $\notin$ (no pertenece).

$$\begin{array}{lll} \text{jue} \in S & \text{se lee} & \text{jueves pertenece a } S \\ & & (\text{jueves es un día de la semana}) \\ \text{mar} \notin F & \text{se lee} & \text{martes no pertenece a } S \\ & & (\text{martes no es un día de fin de semana}) \end{array}$$

Relaciones de inclusión: Cuando todos los elementos de un conjunto también pertenecen a otro conjunto se dice que el primero es subconjunto del segundo. Se indica con el signo $\subset$ (subconjunto o contenido), y su negación es el signo $\not\subset$ (no es subconjunto o no está contenido).

$F \subset S$ se lee F es subconjunto de S
(el fin de semana es parte de la semana)

$F \not\subset E$ se lee F no es subconjunto de E
(el fin de semana no es parte de los días entre semana)

Ejemplo. Consideremos el conjunto $V = \{a, e, i, o, u\}$, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$e \in V \quad \{a, e, o\} \subset V$$

$$i \in V \quad \{a, c, u\} \not\subset V$$

$$b \notin V \quad \{u\} \subset V$$

Conjuntos Numéricos

En años anteriores, hemos estudiado algunos conjuntos numéricos y algunas de sus relaciones de pertenencia e inclusión.

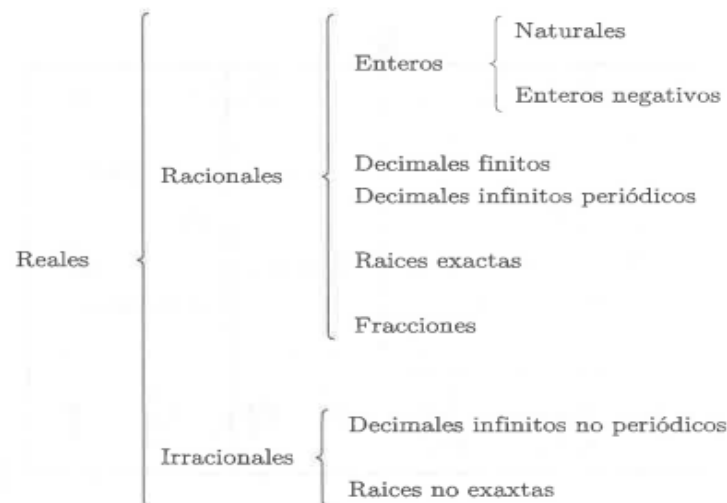
Por ejemplo, el año anterior estudiamos el conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$) como la unión de los Números Racionales ($\mathbb{Q}$) con los Irracionales ($\mathbb{I}$).

A continuación, vamos a repasar cada uno de estos conjuntos para luego establecer relaciones entre ellos utilizando la simbología adecuada.

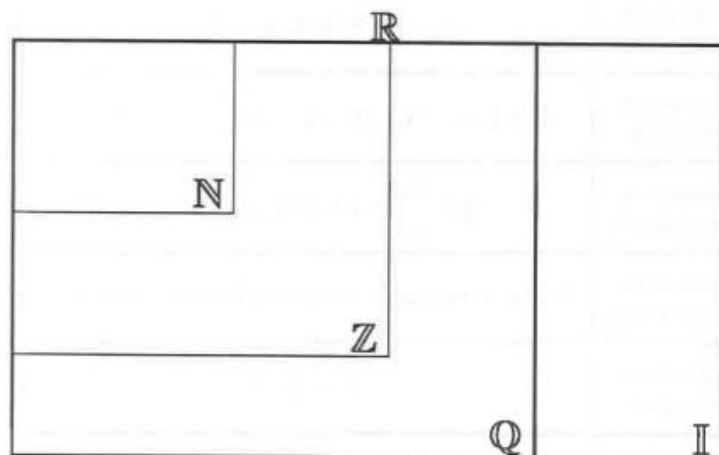


Nombre	Conjunto
Números Naturales	$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$
Números Enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
Números Racionales	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
Números Irracionales	$\mathbb{I} = \{x / x \text{ expansión decimal infinita no periódica}\}$
Números Reales	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

A pesar de que las notaciones anteriores son bastante claras, podemos ser más explícitos en cuanto al tipo de números que contiene cada conjunto:



Además, podemos hablar de cada uno de los conjuntos anteriores como subconjuntos de $\mathbb{R}$, e ilustrar sus relaciones de inclusión de la siguiente manera:



Y más claro aún, con algunos de sus elementos:

$\mathbb{R}$											
0	3	$\sqrt{49}$	-2	-4	5,23	e	π	ϕ			
2	20		-21								
5	8	4	-11	-5	-2,358			1,1236754...			
23	1	$\mathbb{N}$						$\sqrt{2}$			
-37	-26	-10	$\sqrt[3]{-27}$		2,3333...			$-\sqrt[3]{7}$			
-9	-8	-13						-0,957892...			
$-\sqrt{36}$	-7	-1	$\mathbb{Z}$		35,1			$-\pi$			
$\frac{5}{2}$	$-\frac{6}{7}$	$3\frac{2}{3}$	$\sqrt{\frac{16}{81}}$	$\frac{\sqrt{9}}{2}$	$\mathbb{Q}$			$\frac{\sqrt{7}}{11}$		$\mathbb{I}$	

⇒ EJEMPLOS.

A. Escriba los signos $\in$ y $\notin$.

- | | |
|---|---|
| 1) $3 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N}$ | 7) $3,9 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}$ |
| 2) $-5 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}$ | 8) $\frac{-4}{7} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}^-$ |
| 3) $5,6 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}$ | 9) $\frac{\pi}{5} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}$ |
| 4) $20 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^+$ | 10) $\sqrt[4]{55} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R}$ |
| 5) $-2 \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I}$ | 11) $\sqrt[5]{\frac{-64}{2}} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}$ |
| 6) $\frac{14}{7} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N}$ | 12) $4,\overline{78} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I}$ |

B. Escriba los signos $\subset$ y $\not\subset$.

- | | |
|---|--|
| 1) $\mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}$ | 6) $\{3, 4, \sqrt{25}\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N}$ |
| 2) $\mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R}$ | 7) $\{-7, -5, 9\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^-$ |
| 3) $\mathbb{Q} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I}$ | 8) $\{\phi, \sqrt[3]{9}\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I}$ |
| 4) $\mathbb{I} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R}$ | 9) $\{\pi, 0\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R}^+$ |
| 5) $\mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^+$ | 10) $\left\{\frac{6}{7}, -2\right\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}$ |



HISTORIA

El matemático ruso Georg Cantor Venn (1845 - 1918), se considera el creador de la teoría de conjuntos, junto con el alemán Dedekind (1831 - 1916), forjando así la base de muchas otras ramas de la matemática, como las Funciones y la Probabilidad.



De una confitera, Sofía tomó 3 confites de chocomenta, 2 confites de coco y 2 confites de menta; y Rubén tomó 2 confites de mango, 3 confites de chocomenta y 3 confites de fresa.

¿Cuáles tipos de confites tienen entre los dos?

¿Cuáles son los confites que ambos tienen en común?

¿Cuáles tipos de confites le faltan a Sofía para tener los mismos tipos de confites que Rubén?



Operaciones con Conjuntos

Todas las preguntas que se hicieron en el problema anterior, responden a lo que se conoce como el Álgebra de los Conjuntos, la cual consiste en realizar operaciones con ellos, similares a las operaciones aritméticas que conocemos desde la escuela.

Unión: La unión ($\cup$) de dos conjuntos A y B , corresponde al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B . Simbólicamente esto es:

$$A \cup B = \{ x / x \in A \text{ ó } x \in B \}$$

Intersección: La intersección ($\cap$) de dos conjuntos A y B , corresponde al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y también pertenecen a B . Simbólicamente:

$$A \cap B = \{ x / x \in A \text{ y } x \in B \}$$

Complemento: El complemento de un conjunto A (A^c) con respecto al universo U , corresponde al conjunto formado por los elementos de U que no pertenecen a A . Simbólicamente:

$$A^c = \{ x / x \in U \text{ y } x \notin A \}$$



Para comprender mejor las operaciones con conjuntos, John Venn (1834 – 1923), utilizó figuras geométricas para representar conjuntos y sus elementos. Hoy en día, a esto se le conoce como **Diagramas de Venn**, en honor a este matemático de origen británico. Sus representaciones ayudan a obtener las operaciones con conjuntos de una manera más sencilla.

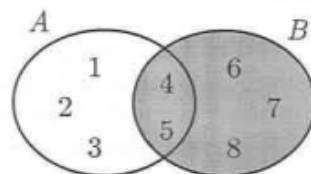
⇒ EJEMPLOS.

1) Se definen los conjuntos:

$$U = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 10\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$$



Con base en la información anterior, determine:

$$A \cup B =$$

$$A^C =$$

$$A \cap B =$$

$$B^C =$$



También es posible determinar estos resultados sin realizar dibujos.

2) Se definen los conjuntos:

$$U = \{x / x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 5\}$$

$$E = \{x / x \in \mathbb{N}, 0 \leq x \leq 3\}$$

$$F = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$$

Con base en la información anterior, determine:

$$E \cup F =$$

$$E^C =$$

$$E \cap F =$$

$$F^C =$$

Guía de Trabajo

A. Coloque los signos $\in$ y $\notin$ según corresponda.

- | | | | | | |
|--------------------------|-------|----------------|-------------------------------|-------|----------------|
| 1) 9 | _____ | $\mathbb{Z}$ | 11) $7\frac{1}{5}$ | _____ | $\mathbb{Q}$ |
| 2) 3 | _____ | $\mathbb{Q}$ | 12) $\sqrt[4]{144}$ | _____ | $\mathbb{Z}$ |
| 3) -2 | _____ | $\mathbb{Q}$ | 13) $\sqrt[3]{\frac{-1}{27}}$ | _____ | $\mathbb{Q}$ |
| 4) 0,2 | _____ | $\mathbb{I}$ | 14) e | _____ | $\mathbb{I}$ |
| 5) $\frac{-1}{2}$ | _____ | $\mathbb{Z}^-$ | 15) $\frac{-8}{5}$ | _____ | $\mathbb{I}$ |
| 6) $\mathbb{C}$ | _____ | $\mathbb{I}$ | 16) $\sqrt{225}$ | _____ | $\mathbb{N}$ |
| 7) $\frac{7}{2}$ | _____ | $\mathbb{Q}^+$ | 17) 3,14 | _____ | $\mathbb{Z}^+$ |
| 8) $\sqrt{3}$ | _____ | $\mathbb{Q}$ | 18) $-6,12$ | _____ | $\mathbb{Q}$ |
| 9) $\sqrt{\phi}$ | _____ | $\mathbb{R}$ | 19) π | _____ | $\mathbb{Q}$ |
| 10) $\sqrt{\frac{1}{4}}$ | _____ | $\mathbb{Q}$ | 20) $\frac{\sqrt{25}}{3}$ | _____ | $\mathbb{R}$ |

B. Se define el conjunto $\mathbb{D}$ como el conjunto de los números decimales y $\mathbb{P}$ como es conjunto de los números primos, de la siguiente forma:

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} / a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \text{ (decimales)}$$

$$\mathbb{P} = \{ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \dots \} \text{ (primos)}$$

Con base en la información anterior, coloque los signos $\subset$ y $\not\subset$ según corresponda.

$$1) \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R} \qquad 11) \quad \mathbb{P} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N}$$

$$2) \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I} \qquad 12) \quad \mathbb{D} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{P}$$

$$3) \mathbb{Q} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R} \qquad 13) \quad \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}^+$$

$$4) \mathbb{Q} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{I} \qquad 14) \quad \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{D}$$

$$5) \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q} \qquad 15) \quad \mathbb{P} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}$$

$$6) \mathbb{R} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N} \qquad 16) \left\{ -\pi, \frac{-3}{5} \right\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q}^-$$

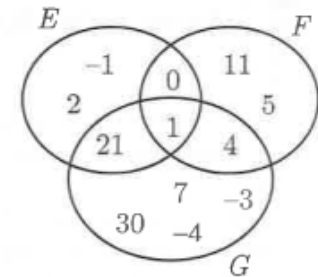
$$7) \mathbb{Z}^- \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R} \qquad 17) \left\{ 1, \sqrt{7}, \sqrt[3]{7} \right\} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{R}$$

$$8) \mathbb{N} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^+ \qquad 18) \{ 0 \} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^+$$

$$9) \mathbb{D} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Q} \qquad 19) \{ -1, -3, 8 \} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{Z}^-$$

$$10) \mathbb{Z} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{D}^- \qquad 20) \{ 4, 73 \} \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \mathbb{N}$$

C. Considere el diagrama de Venn representado al lado, y el universo $U = E \cup F \cup G$.



1) Exprese los conjuntos E , F y G por extensión.

$$E =$$

$$F =$$

$$G =$$

2) Determine el resultado de las siguientes operaciones:

$$E \cup F =$$

$$E \cap F =$$

$$E \cup G =$$

$$E \cap F \cap G =$$

$$F \cup G =$$

$$F^c =$$

$$E \cap G =$$

$$E^c =$$

$$F \cap G =$$

$$G^c =$$

D. Considere el universo $U = \mathbb{R}$, y los conjuntos $\mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$. Escriba el resultado de las siguientes operaciones.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} =$$

$$\mathbb{Q}^c =$$

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} =$$

$$\mathbb{I}^c =$$

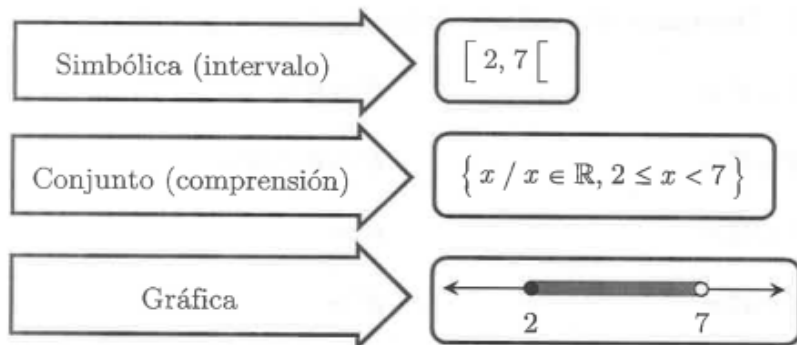


Intervalos Reales

Un intervalo real es un subconjunto de los Números Reales, que cumple una cierta característica o criterio de selección.

Por ejemplo, un intervalo real es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales a 2 y menores que 7, o bien, los números que están entre 2 y 7 incluyendo al 2. Notemos que entre esos dos valores no solo existen números enteros, sino también fracciones, decimales, raíces y muchos otros.

Para representar un intervalo real, podemos hacerlo utilizando tres notaciones:



Además, el número 2 se denomina **extremo inferior** y el 7 se denomina **extremo superior**.

Un intervalo real puede contener uno, los dos o ninguno de los extremos. Si contiene a ambos extremos se llama **intervalo real cerrado**, si contiene sólo uno se llama **intervalo real semiabierto**, y si no contiene ninguno se llama **intervalo real abierto**.

Dado un intervalo expresado en una de las tres notaciones, es posible determinar las otras dos notaciones de dicho intervalo.

⇒ EJEMPLOS.

A. Complete los siguientes cuadros con la notación de conjunto (C), la notación gráfica (G) o la notación de intervalo (I) según se indique en cada caso.

$[-2, 9[$	C	
	G	
$]5, 91]$	C	
	G	
$[3, 8]$	C	
	G	
$]-\frac{2}{5}, \sqrt{5}[$	C	
	G	

$\{x / x \in \mathbb{R}, 1 \leq x < \sqrt{5}\}$	I	
	G	
$\{x / x \in \mathbb{R}, -7 < x < 1\}$	I	
	G	

$\{x / x \in \mathbb{R}, -\pi \leq x \leq 7\}$	I	
	G	
$\{x / x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1\}$	I	
	G	



También existen los intervalos infinitos, que representan todos los números mayores o menores a un valor dado en la recta real. Para su notación de intervalo se introducen los símbolos $+\infty$ y $-\infty$, que representan el infinito positivo y el infinito negativo.

$[2, +\infty[$	C	
	G	
$] -\infty, 7[$	C	
	G	
$]\frac{7}{9}, +\infty[$	C	
	G	
$] -\infty, \sqrt{3}]$	C	
	G	

$\{x / x \in \mathbb{R}, x < \sqrt{11}\}$	I	
	G	
$\{x / x \in \mathbb{R}, x \geq -14\}$	I	
	G	
$\{x / x \in \mathbb{R}, x > -9\}$	I	
	G	
$\{x / x \in \mathbb{R}, 0 \geq x\}$	I	
	G	

B. Considere el intervalo $A =]-3, 4]$. Coloque los signos $\in$ ó $\notin$ según corresponda a los siguientes números. Puede representar el intervalo gráficamente para ubicar los números.

4	_____	A	$\sqrt{17}$	_____	A
-3	_____	A	$-\sqrt{\frac{899}{100}}$	_____	A
$\sqrt{11}$	_____	A	$\sqrt[5]{-32}$	_____	A

C. Considere los intervalos $A = [-3, 6[$ y $B =]1, 10[$.

Determine el resultado de:

$$A \cap B =$$

$$A \cup B =$$

Guía de Trabajo

A. Exprese los siguientes intervalos en notación de conjunto y notación gráfica. Trabaje en su cuaderno.

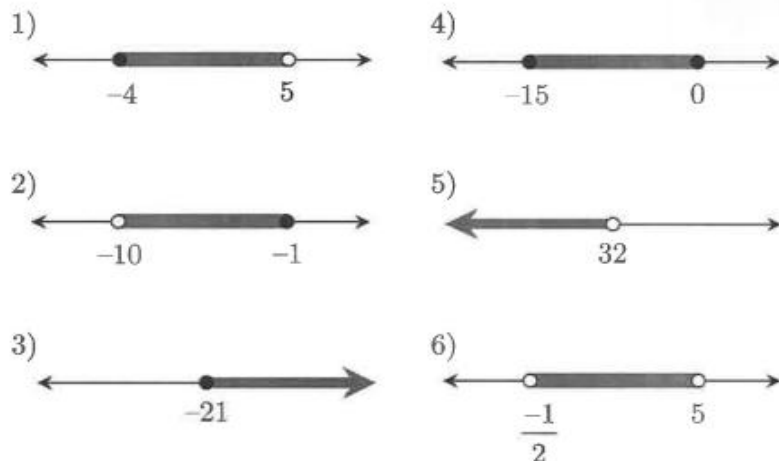
- | | |
|------------------------------|---------------------------------|
| 1) $[-1, \sqrt[3]{5}[$ | 6) $] -\infty, \sqrt{123}[$ |
| 2) $] -e, \pi]$ | 7) $] 5, +\infty[$ |
| 3) $[\frac{1}{2}, \sqrt{5}[$ | 8) $] -\infty, \frac{-\pi}{2}]$ |
| 4) $[1, \sqrt{3}]$ | 9) $[2, 9[$ |
| 5) $[\frac{-3}{2}, +\infty[$ | 10) $[-1, \frac{3}{2}]$ |

B. Exprese los siguientes conjuntos en notación de intervalo.

- | | |
|--|---|
| 1) $\{x / x \in \mathbb{R}, 1 \leq x \leq 8\}$ | 4) $\{x / x \in \mathbb{R}, x < 5\}$ |
| 2) $\{x / x \in \mathbb{R}, \frac{3}{8} < x < \frac{7}{2}\}$ | 5) $\{x / x \in \mathbb{R}, -1 \leq x\}$ |
| 3) $\{x / x \in \mathbb{R}, \frac{-1}{3} \leq x < 0\}$ | 6) $\{x / x \in \mathbb{R}, x < \sqrt{8}\}$ |



C. Expresa los siguientes intervalos en notación de corchetes y en notación de conjunto por comprensión.



D. Para cada pareja de intervalos, determine el resultado de $C \cap D$ y $C \cup D$.

- 1) $C = \left[1, \frac{11}{2} \right]$; $D = \left] \frac{5}{2}, 9 \right[$
- 2) $C = \left] \sqrt{3}, \sqrt{7} \right]$; $D = \left[\sqrt{2}, \sqrt{11} \right[$
- 3) $C = \left[-15, -1 \right[$; $D = \left] -2, 0 \right]$
- 4) $C = \left[-1, +\infty \right[$; $D = \left] 1, 5 \right]$
- 5) $C = \left] -1, 0 \right[$; $D = \left] -\infty, \frac{-1}{2} \right]$

E. Escriba los signos $\in$ y $\notin$ según corresponda.

- 1) $\sqrt{3}$ $\left] -\sqrt{3}, \sqrt{3} \right[$
- 2) 0 $\left] -14, 0 \right]$
- 3) -1 $\left] -2, 0 \right[$
- 4) $\sqrt[3]{15}$ $\left[-1, 4 \right[$
- 5) $-\sqrt{5}$ $\left] -\infty, -1 \right[$
- 6) $\frac{4}{3}$ $\left[-10, 1 \right]$
- 7) -8 $\left] -9, 0 \right]$
- 8) $\frac{-5}{7}$ $\left] -\infty, -3 \right[$
- 9) $\sqrt[5]{-10}$ $\left] -2, +\infty \right[$
- 10) $3,4$ $\left[\frac{17}{5}, +\infty \right[$

