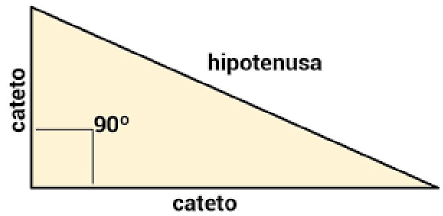
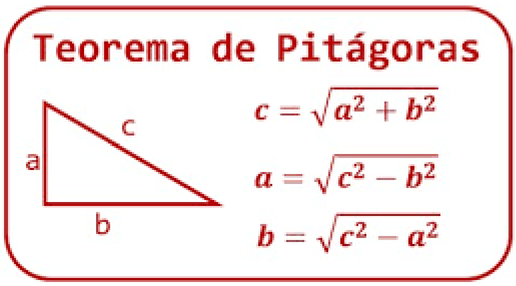
Nombre: ____Sección: _________

Teorema de Pitágoras:

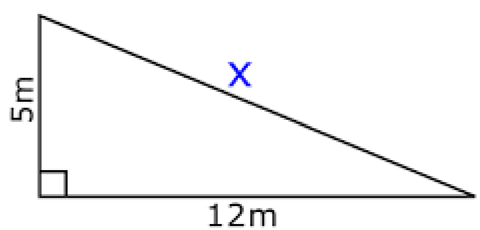
Este teorema tiene la particularidad de poderse utilizar solo en triángulos rectángulos (es decir que posean un ángulo de 90º). Se debe tener claro que en todo triángulo rectángulo sus lados reciben nombres especiales: la hipotenusa es el lado de mayor tamaño y está siempre frente al ángulo recto, los catetos son de menor tamaño y son los que forman el ángulo recto.

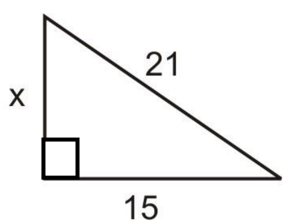


El **teorema de Pitágoras** establece que, el cuadrado de la hipotenusa es equivalente a la **<u>suma</u>** de los cuadrados de los catetos. De aquí se desprenden las siguientes igualdades:



Ejemplos: Determine la medida del lado que falta en las siguientes figuras

A) 	Primero reconozco que "x" es la hipotenusa, utilizo la fórmula correspondiente $x = \sqrt{5^2 + 12^2}$ $x = 13$

B)  ______	Primero reconozco que "x" es un cateto, utilizo la fórmula correspondiente $x = \sqrt{21^2 - 15^2}$ $x = 6\sqrt{6}$

Ejercicios de aplicación:

1. Una aplicación que se le puede dar al teorema de Pitágoras es clasificar triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos, conociendo cuánto miden sus lados.
   Si los lados de un triángulo tienen por medidas "a", "b", "c", donde "c" es la mayor de las tres. Entonces:

   $c^2 = a^2 + b^2$ el triángulo es rectángulo
   $c^2 < a^2 + b^2$ el triángulo es acutángulo
   $c^2 > a^2 + b^2$ el triángulo es obtusángulo

Ejemplo: Si los lados de un triángulo miden 3, 5, 7 centímetros respectivamente, como se clasifica dicho triángulo según sus ángulos.

Como el lado mayor es 7, este debe ir de primero

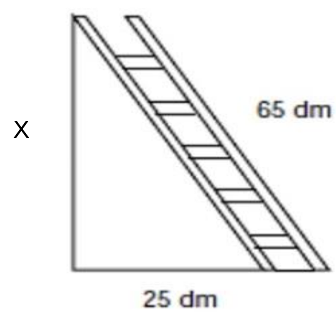
$$7^2 \_\_\_\_\_ 3^2 + 5^2$$

$$49 \_\_\_\_\_ 34$$

Como el símbolo que completa está expresión es > el triángulo es obtusángulo.

2. Analicemos la situacion:

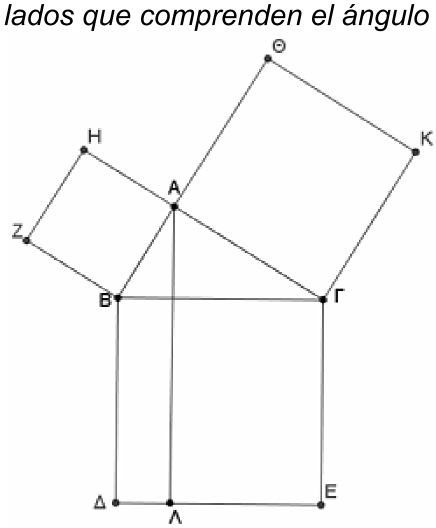
Una escalera de 65 dm de longitud esta apoyada en una pared. El pie de la escalera dista 25 dm de la pared. ¿ A que altura se apoya la escalera en la pared?

	Reconozco un triángulo rectángulo, por eso puedo utilizar Pitágoras. Además "x" representa un cateto en este problema. $x = \sqrt{65^2 - 25^2}$ $x = 60$ La parte superior de la escalera esta a 60 dm

Reseña histórica

- Una demostración muy importante del Teorema de Pitágoras aparece en el texto de Euclides, matemático griego del siglo IV a.C. La proposición 47 del Libro I de Elementos de Euclides es el conocido teorema de Pitágoras. Se transcribe a continuación tal como aparece en dicho texto:

  Proposición 47: En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.



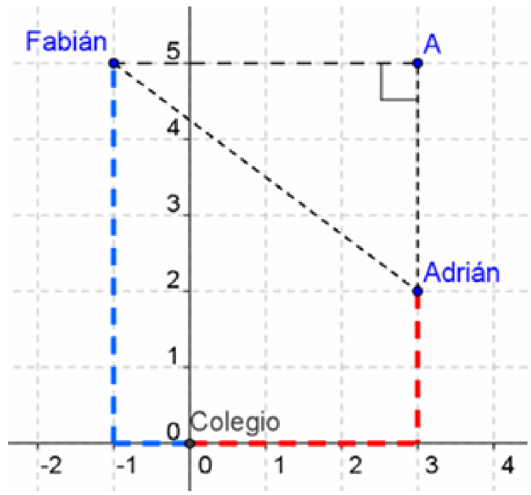
Euclides, quien vivió tiempo después de Pitágoras, ilustra el teorema y permite conocer los métodos que se usaban para demostrar proposiciones.

Hoy, se sabe que el conocido Teorema de Pitágoras se desarrolló en otras culturas a parte de la griega. Por ejemplo, en China se desarrolló con el nombre del teorema de Kouku. Este aparece demostrado en un texto muy antiguo llamado ChouPei.

Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano

Considere el siguiente problema:

Adrián y Fabián salen del colegio para su casa. Si Adrián camina 3 km hacia el Este y 2 km hacia el Norte y Fabián camina 1km al Oeste y 5 km al Norte, ¿a qué distancia se encuentra la casa de Adrián de la de Fabián? Sugerencia: Se puede realizar una representación gráfica en un plano coordenado, en donde la casa de Fabián esté en el punto (-1,5) y la casa de Adrián esté en el punto (3,2), siendo el colegio el punto (0,0). Luego, utilizar el Teorema de Pitágoras.



Otra manera es aplicando la fórmula para encontrar la distancia entre dos puntos.

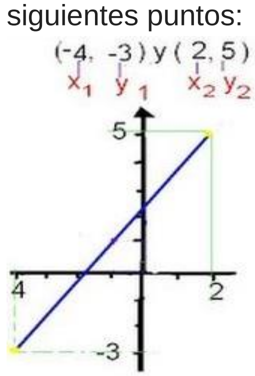
Recordemos que un punto es un par ordenado de la forma (x, y) donde "x" se ubica en el eje horizontal (de las abscisas) y "y" en el eje vertical (de las ordenadas).

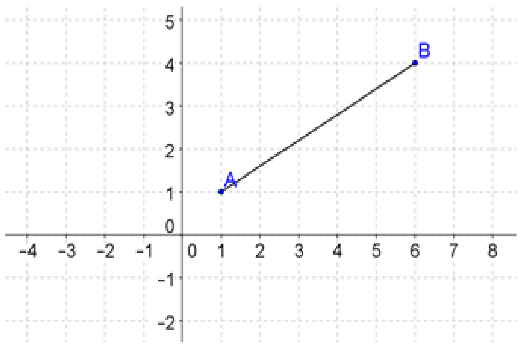
La distancia entre dos puntos es la medida del segmento de recta que los une.

Dados dos puntos cualesquiera A=(x_1, y_1) y B= (x_2, y_2), denotamos la distancia entre ellos como d (A, B) y para encontrar su medida utilizamos la fórmula:

$$d\ (A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplos:

Calcule la distancia entre los siguientes puntos: 	Sustituyendo en la fórmula: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ tenemos $\sqrt{(2 - -4)^2 + (5 - -3)^2}$ Realizando la operación en la calculadora nos da que 10 es la distancia entre ellos.

De acuerdo con la siguiente representación en el plano determine la distancia entre Ay B 	Primero escribo las coordenadas de A y B. A = (1, 1) B = (6, 4) Sustituyendo en la fórmula: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ tenemos $\sqrt{(6-1)^2 + (4-1)^2}$ Realizando la operación en la calculadora nos da que $\sqrt{34}$ es la distancia entre ellos.

- Corrobore que en el problema de Adrián y Fabián obtenemos el mismo resultado con la fórmula de distancia que con el uso de Pitágoras.

Ejercicios de aplicación

1. Clasificar un triángulo, dadas las coordenadas de sus vértices.

Dadas las siguientes coordenadas de los vértices de un triángulo A(2,1), B(6,5) y C(9,2), clasifique el triángulo de acuerdo con la medida de sus ángulos y la medida de sus lados. Argumente su respuesta.

Con la fórmula de la distancia entre dos puntos se obtiene que:

La distancia de A a B es

$$d = \sqrt{(2-6)^2 + (1-5)^2} = 4\sqrt{2}$$

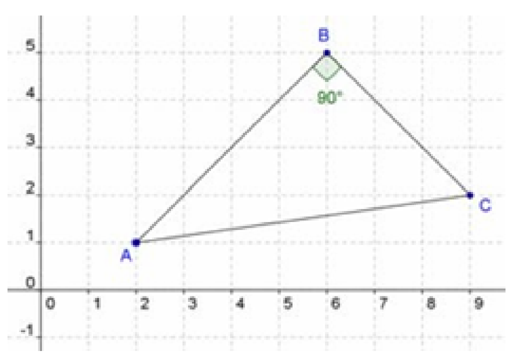
La distancia de B a C es

$$d = \sqrt{(6-9)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

La distancia de A a C es

$$d = \sqrt{(2-9)^2 + (1-2)^2} = 5\sqrt{2}$$

y por lo tanto, como $(5\sqrt{2})^2 = (4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2$ entonces el triángulo es rectángulo y como las medidas de sus lados son diferentes se clasifica como escaleno.



2. Pedro y David van para la plaza de futbol a entrenar, Pedro está ubicado en el punto (7, 4) y David en el punto (-4, 6), si la cancha está en el punto (-1, -3) ¿Cuál de ellos se encuentra más cerca de la plaza?

   Consideremos que Pedro está en el punto (7, 4), David en (-4 , 6) y la Plaza (-1 , -3)

Distancia entre Pedro y la plaza	Distancia entre David y la plaza
$\sqrt{(-1-7)^2+(-3-4)^2}$	$\sqrt{(-1--4)^2+(-3-6)^2}$
10,6	9,48

Medidas angulares en grados y radianes

Hasta ahora, las medidas de los ángulos sólo se conocen en grados. Sin embargo, las medidas de los ángulos se pueden expresar en otra unidad llamada radianes (rad). La equivalencia se da al decir que $\pi\ rad$=180°. Las conversiones se pueden dar en dos direcciones diferentes: de grados a radianes y de radianes a grados. Se estudia cada caso por separado.

- Si la medida α está dada en grados, la medida en radianes se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$medida\ del\ ángulo = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°}$$

- Si la medida α está dada en radianes, la medida en grados se obtiene por medio de la siguiente fórmula:

$$medida\ del\ ángulo = \alpha\ rad \cdot \frac{180°}{\pi}$$

Ejemplo:

1. Convierta las siguientes medidas a radianes.

a. $30°$.
b. $45°$.
c. $60°$.

Solución

a. $30° = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}$.
b. $45° = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}$.
c. $60° = 60° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{3}$.

2. Convierta las siguientes medidas a grados.

a. $\frac{\pi}{4}$.
b. $\frac{\pi}{2}$.
c. $\frac{5\pi}{6}$.

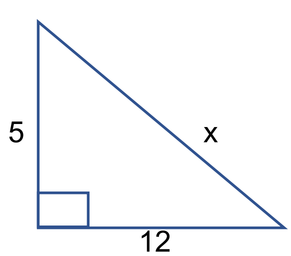
Solución

a. $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$.
b. $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$.
c. $\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 150°$.

Trabajo Cotidiano #5

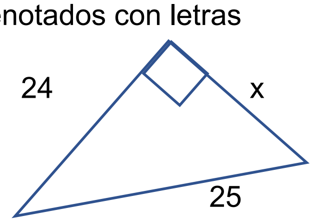
1) Encuentre los valores faltantes en cada caso, denotados con letras

a)



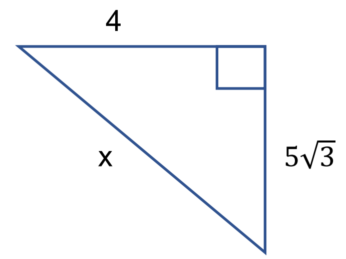
x = ____________

b)



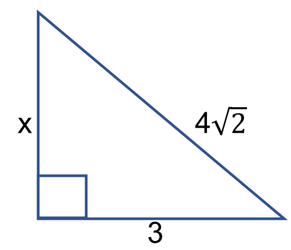
x = ____________

c)



x = ____________

d)



x = ____________

2) Resuelva los siguientes problemas de aplicación

a) Calcular el perímetro de un rombo si sabemos que sus diagonales miden 16 cm y 12 cm respectivamente.

b) Calcular la medida de la diagonal mayor de un rombo si su lado mide 25 cm y su diagonal menor 14 cm

c) En una empresa se desea construir una rampa, que está a 5m del plano horizontal y asciende a una altura de 3,4 ¿Cuál es la longitud de la rampa?

d) En un trapecio isósceles las bases miden 15 cm y 45 cm respectivamente y uno de sus lados no paralelos mide 23 cm ¿Cuánto mide su altura?

e) Clasifique cada uno de los siguientes triángulos por sus lados y por sus ángulos:

1) $5, 8\ y\ 12$

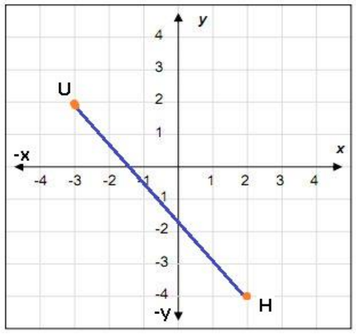
2) $2\sqrt{3}, 4, 2$

3) $\frac{13}{2}, 5, 6$

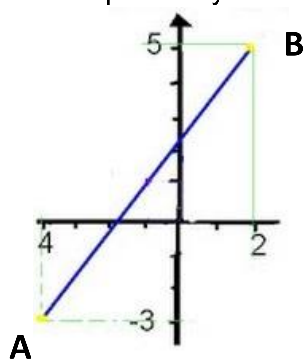
3) Determine las siguientes distancias:

a) Entre A y B si se sabe que: A (9, -2) y B (-3, 7)

b) Entre U y H según la gráfica



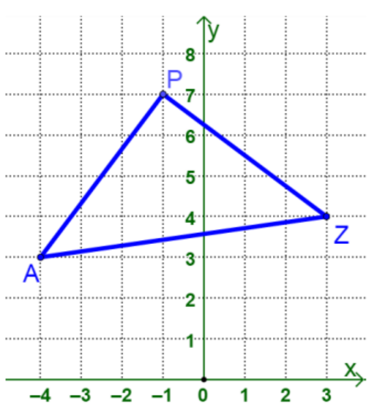
c) Entre el punto A y B de la siguiente figura:



4) Resuelva los siguientes problemas:

a) María necesita ir al supermercado, ella tiene tres opciones cerca de su casa y desea saber cuál está más cerca, la ubicación de María es el punto (12, 7), Más x Menos está en el punto (-1, 3), Pali está en el punto (1, -2) y Walmart está en el punto (8, -3) ¿Cuál supermercado será el más cercano?

b) Determine el perímetro del triángulo PAZ



c) Los vértices de un triángulo corresponden a los puntos (-1, -2), (1, -3) y (2, 1). Clasifique ese triángulo según la medida de sus lados y según la medida de sus ángulos.

5) Convertir de grados a radianes

1) 15º   2) 35º   3) 80º   4) 150º

5) 200º   6) 90º   7) 60º   8) 45º   9) 30º

6) Convertir de radianes a grados

1) $\frac{\pi}{5} rad$ 2) $\frac{\pi}{10} rad$ 3) $3\pi\ rad$

Razones trigonométricas básicas (seno, coseno, tangente)

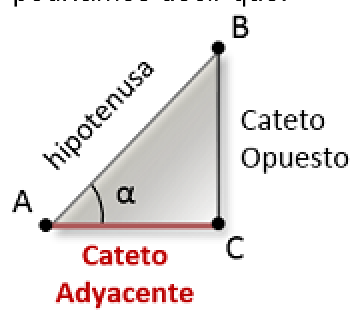
Considere el siguiente problema:
Se quiere construir una rampa para personas con discapacidad en un colegio. Según la ley 7600 de Costa Rica, el ángulo adecuado para hacer estas rampas es de 15°. Si la altura que se quiere alcanzar es de 1,3 m:
a. ¿A qué distancia debe comenzar la rampa?
b. ¿Qué longitud tendría la rampa?

Una forma de solucionar este problema podría ser realizando una representación muy precisa tanto del ángulo que se conoce como de la altura recomendada. Sin embargo, existe un método matemático que permite determinar con precisión lo que el problema solicita. Este método es la utilización de razones trigonométricas.

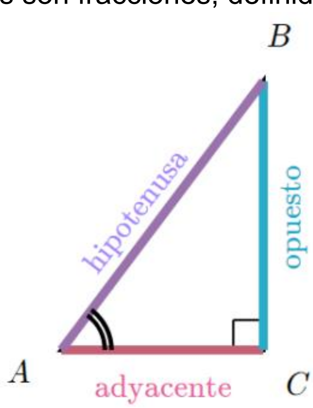
Las razones trigonométricas que se estudiaran este año son seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan)

En nuestro estudio, dichas razones tienen la limitante de poderse solo determinar en triángulos rectángulos, sirven para encontrar tanto lados como ángulos faltantes.

Es muy importante para comprender los ejercicios identificar en un triángulo rectángulo cual es la hipotenusa y los catetos, y saber diferenciar entre cateto adyacente y cateto opuesto a un ángulo dado.
Con respecto al ángulo α, en este ejemplo podríamos decir que:



Note que el cateto opuesto a α es el que está frente a él, y el cateto adyacente es el que toca al ángulo.
Las razones trigonométricas son fracciones, definidas con respecto a un ángulo agudo de la siguiente manera

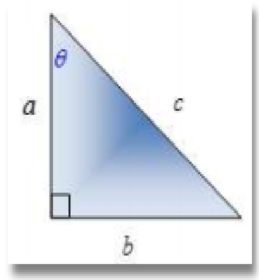


$$\sin(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos(A) = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan(A) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

Ejemplo general

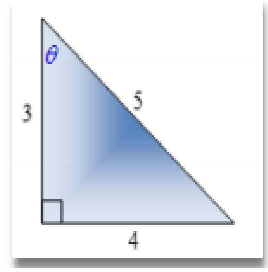


$$sen\ \theta = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} = \frac{b}{a}$$

Ejemplo particular



$$sen\,\theta = \frac{4}{5}$$

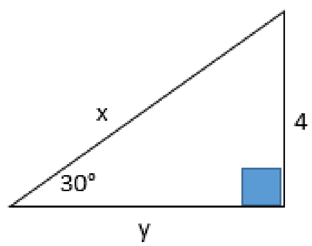
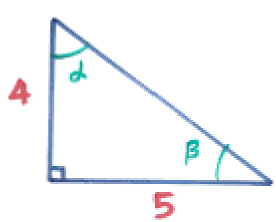
$$\cos\theta = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{4}{3}$$

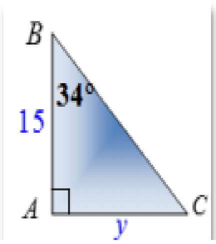
Esta parte de las matemáticas tiene gran aplicabilidad en la ciencia y en la vida cotidiana.

Estas razones se pueden utilizar para calcular la medida de un lado o un ángulo en un triangulo rectangulo.

Ejemplos:

 	**Determine las medidas de "x" y "y"** Debemos guiarnos por el ángulo de 30º, sabemos que "x" es la hipotenusa, "y" es el cateto adyacente a 30° y 4 el cateto opuesto. Para determinar "x" ocupamos escoger una fracción que tenga al 4 y a la "x", es decir, al cateto opuesto y a la hipotenusa. La única fracción que nos sirve es "sen" $\text{sen } 30° = \frac{4}{x}$ (así se despeja cuando la letra está abajo) Despejando $x = \frac{4}{\text{sen } 30°}$ Al usar la calculadora verifique que este en D, el resutado obtenido es $x = 8$ De manera análoga para "y" $\tan 30 = \frac{4}{y}$ y= $\frac{4}{\tan 30}$ y= $4\sqrt{3}$
 	**Determine las medidas de "α" y "β"** Debemos guiarnos por el ángulo que debemos calcular, además como 4 y 5 son los catetos la razón trigonométrica conveniente es "tan" $\tan\alpha = \frac{5}{4}$ $\alpha = 51°$ NOTA:Recuerde que para calcular el ángulo debo colocar **SHIF TAN** $\frac{5}{4}$ **=** en la calculadora y esta me da el valor. Por otro lado, **β=180 – 90 – 51** **β=39º**

Determine el valor de "y" en el siguiente triángulo



Primero: Se utiliza la razón trigonométrica adecuada $\tan 34^{\circ} = \frac{y}{15}$

Segundo: Se despeja la variable $y = 15 \bullet \tan 34^{\circ}$

Tercero: Utilizamos la calculadora y obtenemos $y \approx 10{,}12$

Observe que en este último despeje como el número está abajo en la fracción se pasa a multiplicar

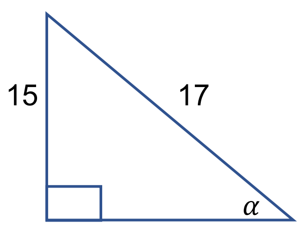
Relaciones entre tangente, seno y coseno
Es importante recordar que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo siempre suman 90°, estos ángulos reciben el nombre de ángulos complementarios. Las razones trigonométricas de ángulos complementarios cumplen algunas propiedades importantes.

Sean **"$\boldsymbol{\alpha}$" y** "$\boldsymbol{\beta}$" dos ángulos complementarios (que suman 90ª) se cumple que cos $\boldsymbol{\alpha}$ **=** sen $\boldsymbol{\beta}$**,** y por otro lado, cos $\boldsymbol{\beta}$ **=** sen $\boldsymbol{\alpha}$. Además, $\boldsymbol{tan\alpha} = (\boldsymbol{tan\,\beta})^{-1}$

Trabajo cotidiano # 6

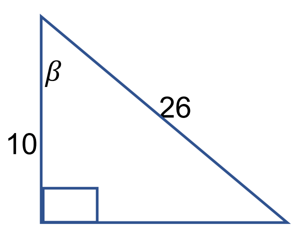
1. De acuerdo con la figura:

a)



Determine el valor de:
cos α= ___________ tan α = ___________ sen α = ___________

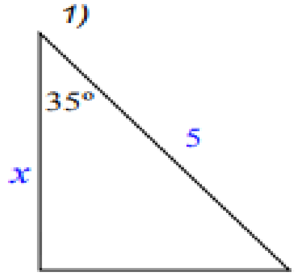
b)



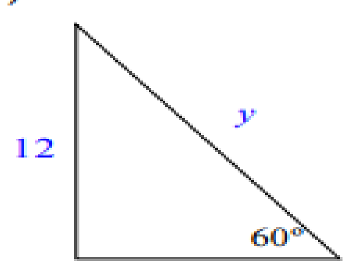
Determine el valor de:
cos β= ___________ tan β = ___________ sen β = ___________

2. En los siguientes triángulos rectángulos determine el valor de "x" o "y".

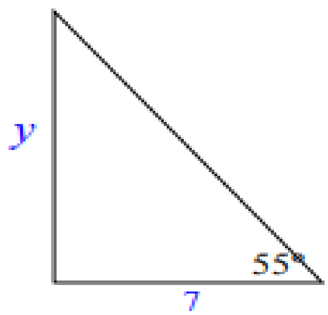
1)



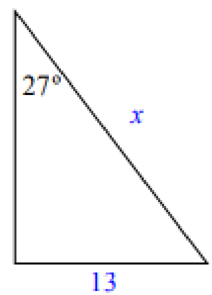
2)



3)

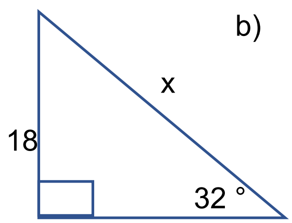


4)

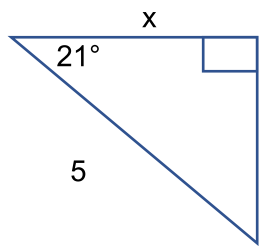


3. En cada caso determine el valor de “x” y escriba su respuesta:

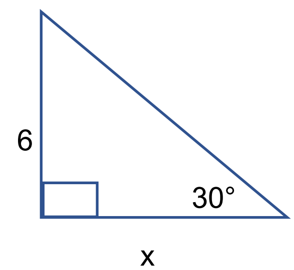
a)



b)

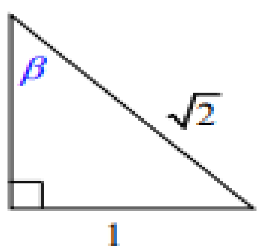


c)

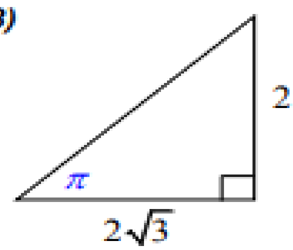


4. En los siguientes triángulos calcule el valor de los ángulos señalados. Deben aparecer los procedimientos.

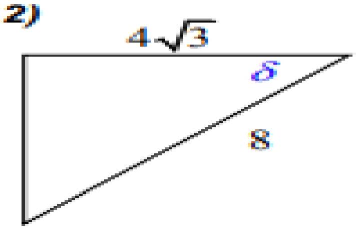
1)



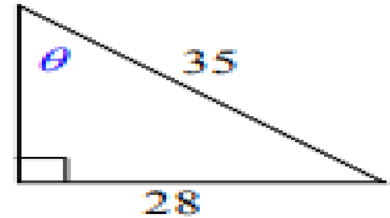
3)



2)

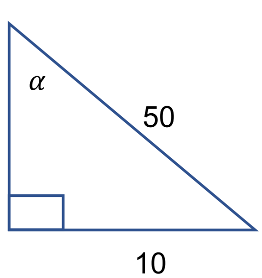


4)

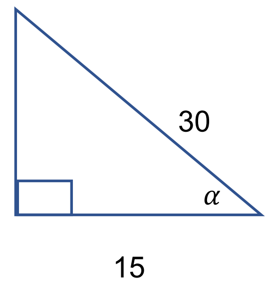


5. En cada caso determine el valor de α y escriba su respuesta:

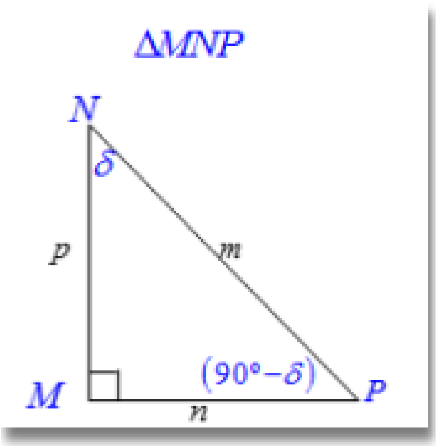
a)



b)



6. Escriba al lado de las siguientes expresiones **SI** , si es una afirmaciòn con certeza verdadera o **NO** de ser lo contrario



Expresiones

1) $sen\ \delta = sen(90^\circ - \delta)$

2) $\cos\ \delta = sen(90^\circ - \delta)$

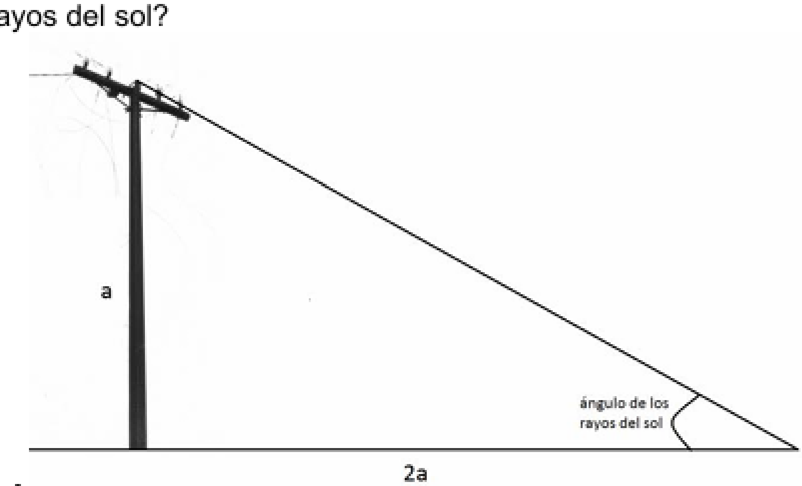
3) $sen\ (90^\circ - \delta) = \cos\ (90^\circ - \delta)$

4) $\cos\ (90^\circ - \delta) = sen\,\delta$

5) $\cos\ (90^\circ - \delta) = \cos\delta$

Ángulos de elevación y depresión

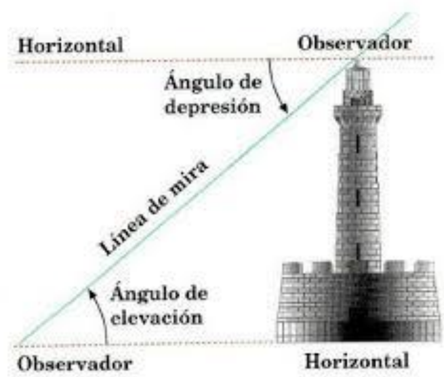
En un determinado momento del día, la sombra de un poste de electricidad mide el doble de longitud que la altura misma del poste. ¿En ese momento, cuál es el ángulo de depresión de los rayos del sol?



Conceptos de ángulos de elevación y depresión

Los conceptos de ángulos de elevación y depresión son muy importantes en la resolución de problemas relacionados con trigonometría.

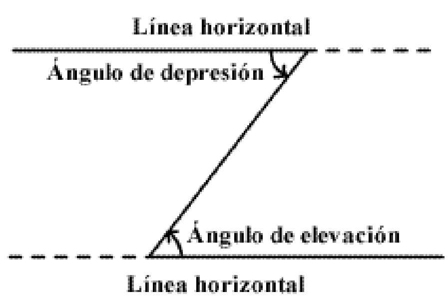
Trabajaremos las definiciones utilizando el siguiente ejemplo:



Suponga que hay un observador en el suelo que mira la parte más alta de la torre, el ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión se conoce como ángulo de elevación. Es necesario que el observador este abajo y el objeto que se observa arriba para que el ángulo se llame de elevación.

Por otro lado, suponga que hay un observador en la parte de arriba de la torre que mira a la persona que está en el suelo, el ángulo que se forma entre la horizontal y la línea de visión se conoce como ángulo de depresión. Es necesario que el observador este arriba y el objeto que se observa abajo para que el ángulo se llame de depresión.

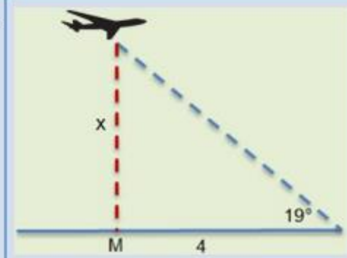
Dese cuenta que el ángulo de elevación y el ángulo de depresión son congruentes .



Por lo anterior, al resolver cualquier problema de ángulos de elevación o depresión, podríamos siempre colocar la medida de este ángulo en la parte inferior de la figura.

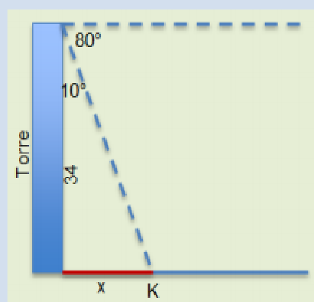
Observemos los siguientes ejemplos:

1. Cuando un avión pasa sobre un punto M ubicado en el suelo, una estación de observación que está situada a 4 km de M lo observa con un ángulo de elevación de 19°. Calcule la altura aproximada a la que se encuentra el avión en ese momento

A	Se dibuja una figura representativa de la situación.	
B	Se plantea la razón trigonométrica tangente del ángulo que mide 19° para encontrar el valor de x.	$\tan 19^{\circ} = \frac{x}{4}$ $\Rightarrow 4\tan 19^{\circ} = x$ $\Rightarrow 1,4 \approx x$
C	Se da respuesta al problema planteado.	La altura aproximada del avión en ese momento es de $1,4\ \text{km}$.

Note que se escogió la razón tangente porque se tenía el cateto adyacente al ángulo de 19º y se quería determinar el cateto opuesto. La única razón, de las estudiadas, que los involucra a ambos es la tangente.

2. La medida del ángulo de depresión desde lo alto de una torre de 34 m de altura hasta un punto K en el suelo es de 80° . Calcule la distancia aproximada del punto K a la base de la torre.

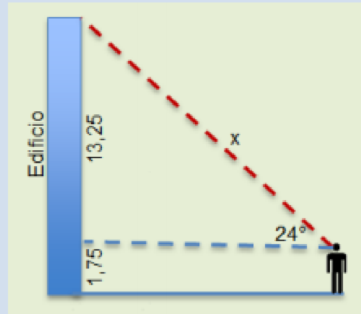
A	Se dibuja una figura representativa de la situación.	
B	Se plantea la razón trigonométrica tangente del ángulo que mide 10° para encontrar el valor de x.	$\tan 10^{\circ} = \frac{x}{34}$ $\Rightarrow 34\tan 10^{\circ} = x$ $\Rightarrow 6 \approx x$
C	Se da respuesta al problema planteado.	La distancia aproximada desde el punto K a la base de la torre es de $6\ \text{m}$.

Note que como el ángulo de depresión no se encuentra dentro del triángulo, se trabajó con el ángulo adyacente a él. Para encontrarlo se consideró que toda altura es perpendicular a la horizontal, o sea forma con la horizontal 90º. Por eso 90º – 80º= 10º

También se pudo trabajar con el ángulo de la base que mide 80º.

En muchos problemas se debe tomar en cuenta la altura del observador, ya sea para sumarla o restarla a la altura total con la que se trabaja. Observemos el siguiente ejemplo:

1. Un turista observa la parte más alta de un edificio de 15 m de altura, con un ángulo de elevación de 24° . Si realiza la observación con unos binoculares que sostiene a 1,75 m del suelo, calcule la distancia aproximada entre el turista y la parte más alta del edificio.

A	Se dibuja una figura representativa de la situación, dividiendo en dos partes la altura del edificio según el dato de la altura a la cual se ubican los binoculares del turista.	
B	Se plantea la razón trigonométrica seno del ángulo que mide $24°$ para encontrar el valor de x.	$\text{sen}24° = \frac{13,25}{x}$ $\Rightarrow x = \frac{13,25}{\text{sen}24°}$ $\Rightarrow x \approx 32,6$
C	Se da respuesta al problema planteado.	La distancia aproximada entre el turista y la parte más alta del edificio es de $32,6$ m.

Trabajo cotidiano # 7

Resuelva cada uno de los siguientes problemas, para ello realice primero un dibujo donde ubique sus datos

a) Un ingeniero coloca un cable desde la parte más alta de una torre de 45 m de altura hasta un punto A en el suelo. Si el ángulo de elevación que se forma en el punto A es de 38° , calcule la longitud aproximada del cable.

b) Dos edificios A y B están ubicados uno en frente del otro. El edificio A tiene 48 m de altura y el ángulo de depresión que se forma desde su parte más alta hasta la base del edificio B es de 65° . Calcule la distancia aproximada entre ambos edificios.

c) La sombra de un edificio tiene una longitud de 0,15 km. Si el ángulo de elevación que se forma en la punta de la sombra hacia la parte más alta del edificio es de 32° , calcule la altura aproximada del edificio.

d) En el suelo se encuentra el objetivo de rescate de un helicóptero que está volando sobre él, mientras se ubica a 600 m de un puesto de observación en tierra, desde donde es observado con un ángulo de elevación de 55°. Calcule la distancia aproximada entre el objetivo del helicóptero y el puesto de observación.

e) Desde la parte más alta de un faro, con un ángulo de depresión de 54° , se observa un barco en el mar a una distancia de 117 m de su base. Calcule la altura aproximada del faro.

f) Charlie está haciendo volar su cometa dándole 90 pies de hilo. Si el ángulo de elevación del hilo es de 70° ¿Qué tan alta está la cometa? Aproxima tu respuesta al pie más cercano.