

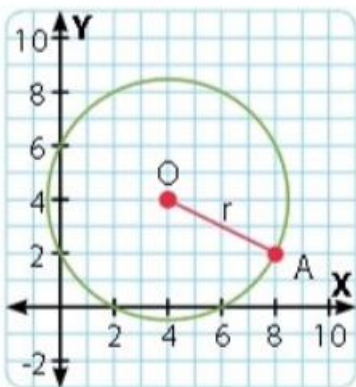


Centro Educativo: Colegio Ambientalista el Roble	Nivel: Décimo
Docente: Alonso Ramirez Abarca	Asignatura: Matemática

Nombre: _____ Sección: _____

Circunferencia en el plano cartesiano

En una circunferencia de centro O , los extremos de un radio " r " corresponden a los puntos $O(4, 4)$ y $A(8, 2)$ tal y como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida del radio de la circunferencia?

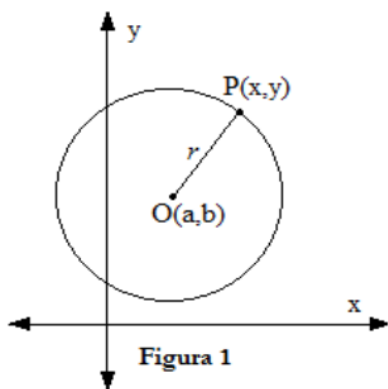


CIRCUNFERENCIA

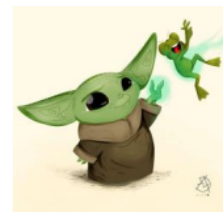


Concepto de circunferencia en el plano: La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro. La distancia de cada punto de la circunferencia al centro se llama radio.

Por ejemplo:



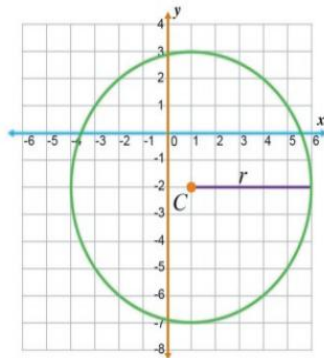
En la **figura 1** se muestra una circunferencia con centro en el punto $O(a,b)$ y radio r . Un punto $P(x,y)$ pertenece a la circunferencia



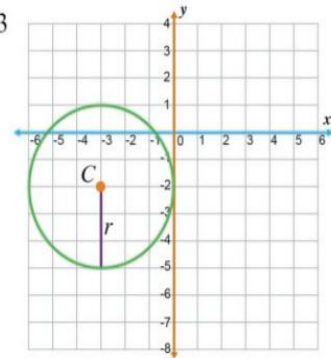
EJEMPLO

- Represente gráficamente una circunferencia dado su centro C y su radio r .

1. Sea $C(1, -2)$ y $r = 5$

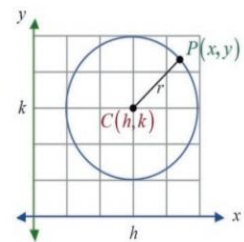


2. Sea $C(-3, -2)$ y $r = 3$



Representación algebraica de una circunferencia

En geometría analítica, la gráfica de una circunferencia, con centro $C(h, k)$ y radio r se puede describir algebraicamente mediante una ecuación estándar de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

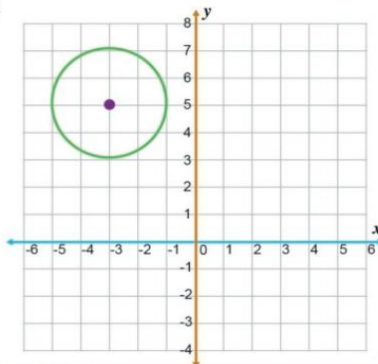


CASO 1: CUANDO SE TIENE CENTRO Y RADIO

EJEMPLO

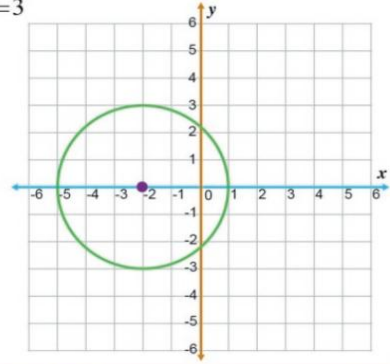
- Realice la representación algebraica de las siguientes circunferencias de acuerdo a las condiciones dadas.

1 $C(-3, 5)$ y $r = 2$
 h k



Representación algebraica

2 $C(-2, 0)$ y $r = 3$
 h k



Representación algebraica

Ejercicio: realice en su cuaderno la representación gráfica de cada circunferencia con los datos que se brindan y luego anote su representación algebraica.

a) $A(6, 2)$ y $r = 4$

b) $B(2, -4)$ y $r = 2$

c) $C(-3, -1)$ y $r = 3$

Caso 2: cuando se tiene la ecuación.

Ejemplo: Determine el centro y el radio de las siguientes ecuaciones de la circunferencia.

a) $(x + 7)^2 + (y - 9)^2 = 81$

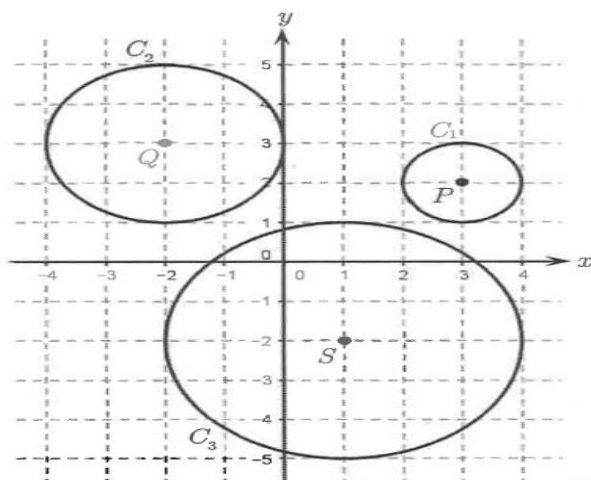
b) $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{11})^2 = 49$

c) $(x - 6)^2 + y^2 = 121$

Ejercicio: a continuación, se presentan algunas ecuaciones de la circunferencia, en su cuaderno anote el centro y el radio de cada circunferencia y luego realice la representación gráfica de cada una de ellas-

1. $x^2 + y^2 = 16$
2. $(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 1$
3. $(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 4$

Ejercicio: obtenga el centro y el radio de cada una las circunferencias y luego anote la ecuación de cada una de ellas.



	Ecuación	Centro	Radio
C_1			
C_2			
C_3			

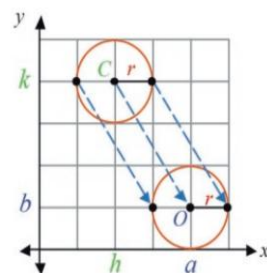
Otros ejemplos:

1. Determine la ecuación de la circunferencia que contiene el punto $B(0, 5)$ y tiene por centro $A(-2, 3)$.
2. Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-6, -5)$ y $B(2, 3)$. Determine la ecuación de la circunferencia.

TRASLACIÓN DE CIRCUNFERENCIAS

Para trasladar la gráfica de una circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, con centro $C(h, k)$ y radio r ; se determina un nuevo centro $O(a, b)$ en el plano cartesiano, cuya ecuación estándar corresponde a $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Cabe mencionar que en una traslación el radio no varía.

Es importante recordar que al realizar una traslación se puede hacer referencia a los puntos cardinales: este (movimiento hacia la derecha), oeste (movimiento hacia la izquierda), norte (movimiento hacia arriba) y sur (movimiento hacia abajo).



Ejemplos: Realice la traslación de cada circunferencia y anote la nueva ecuación.

- 1) Si $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$ traslade su centro al punto $C:(1, 2)$.
- 2) Si $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ traslade su centro al punto $C:(-2, 3)$.
- 3) Si $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$ traslade su centro al punto $C:(0, -5)$.
- 4) Si $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$ traslade su centro al punto $C:(-4, -7)$.

Práctica #1

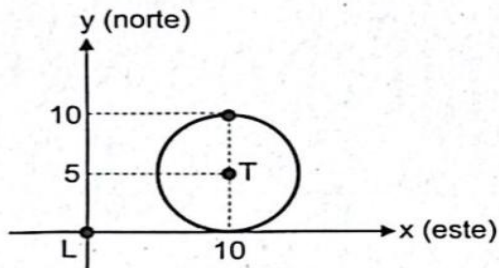
A continuación, se le presentan varias circunferencias a las cuales se les aplicará la traslación indicada (vector). Determine en cada uno de los casos el nuevo centro de la ecuación final, así como su ecuación final.

Ecuación C	Centro	Vector traslación	Nuevo centro	Nueva ecuación
$x^2 + (y - 2)^2 = 1$		$\vec{v} = (2, 4)$		
$(x - 3)^2 + y^2 = 7$		$\vec{v} = (-1, 0)$		
$(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 3$		$\vec{v} = (11, 7)$		
$(x - 9)^2 + (y - 1)^2 = 25$		$\vec{v} = (-1, -9)$		
$x^2 + (y + 4)^2 = 11$		$\vec{v} = (-8, 0)$		
$(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = 4$		$\vec{v} = (0, 1)$		
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$		$\vec{v} = (7, -6)$		

Considere la siguiente información:

Un dispositivo electrónico, que emite una señal inalámbrica con forma circular, se ubica 10 m al este y 5 m al norte del laboratorio de una escuela. El alcance máximo de la señal emitida por ese dispositivo se ubica a 5 m alrededor de este.

La siguiente representación gráfica, cuyas unidades están en metros, muestra las ubicaciones, T del dispositivo electrónico y L del laboratorio, así como la ubicación de la circunferencia correspondiente al alcance máximo de la señal emitida por ese dispositivo:



De acuerdo con la información anterior, si desde su ubicación actual el dispositivo se traslada 5 m al sur, entonces, ¿cuál es la representación algebraica, cuyas unidades están en metros, de la circunferencia correspondiente al alcance máximo de la señal emitida por ese dispositivo en su nueva ubicación?

De acuerdo con la información anterior, si desde su ubicación actual el dispositivo se traslada 5 m al sur, entonces, ¿cuál es la representación algebraica, cuyas unidades están en metros, de la circunferencia correspondiente al alcance máximo de la señal emitida por ese dispositivo en su nueva ubicación?

- A) $(x - 10)^2 + y^2 = 25$
- B) $(x - 15)^2 + (y - 5)^2 = 25$
- C) $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 25$

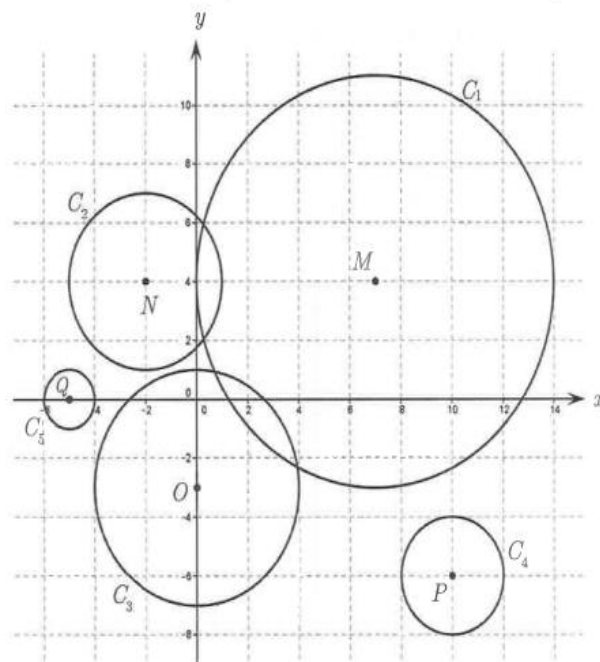
Práctica #2

Instrucciones: trabaje en orden, si necesita realizar procedimientos, los debe realizar en el cuaderno, no realice tachones.

A. Escriba la ecuación (representación algebraica) de cada una de las circunferencias que cumple las condiciones dadas.

- 1) Centro en $A(-2, -5)$ y $r = 1$.
- 2) Centro en $B(-11, 10)$ y $r = 15$.
- 3) Centro en $C(4, -6)$ y diámetro 18.
- 4) Centro en $D(0, 7)$ y $r = 10$.
- 5) Centro en $E(-3, 0)$ y radio 8.
- 6) Centro en el origen y diámetro 22.
- 7) Centro en $K(3, 5)$ y que sea tangente al eje x .

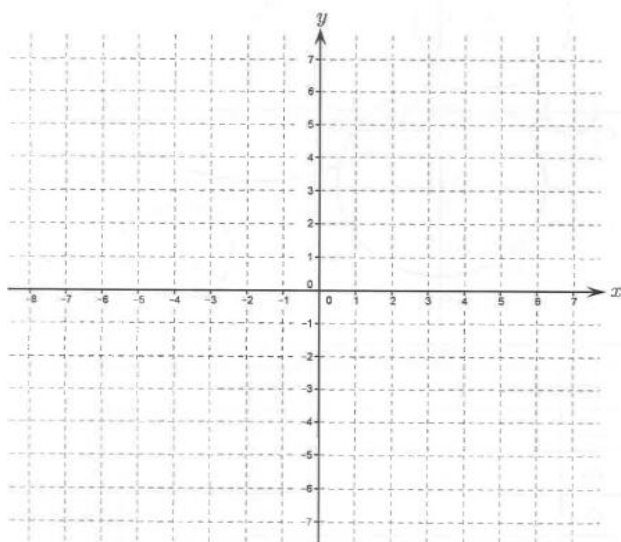
B. De acuerdo con los datos de la gráfica, determine la ecuación de cada una de las circunferencias representadas en ella. Además indique las coordenadas del centro y el radio de cada una, indicándolos en el cuadro de abajo.



	Ecuación	Centro	Radio
C_1			
C_2			
C_3			
C_4			
C_5			

C. En el siguiente sistema de coordenadas, grafique las siguientes circunferencias. Utilice un compás.

- 1) $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 4$
- 2) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$
- 3) $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 16$
- 4) $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 1$
- 5) $x^2 + (y-4)^2 = 9$



D. Determine el centro y el radio de cada una de las siguientes circunferencias.

- 1) $(x+20)^2 + (y-31)^2 = 144$
- 2) $x^2 + (y+2)^2 = 12$
- 3) $(x-6)^2 + (y+\sqrt{5})^2 = 18$
- 4) $(x-13)^2 + (y-19)^2 = 169$
- 5) $(x+9)^2 + y^2 = 225$
- 6) $x^2 + y^2 = 1$



E. Resuelva los siguientes problemas.

- 1) Determine la ecuación de una circunferencia cuyo centro es $F(0, 1)$ y contiene el punto $G(4, -3)$.
- 2) El centro de una circunferencia es $H(-1, 2)$, y ésta contiene el punto $I(-1, -5)$. ¿Cuál es la representación algebraica de dicha circunferencia?
- 3) Los extremos del diámetro de una circunferencia son los puntos $J\left(\frac{7}{2}, -2\right)$ y $K\left(\frac{1}{2}, -2\right)$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia?

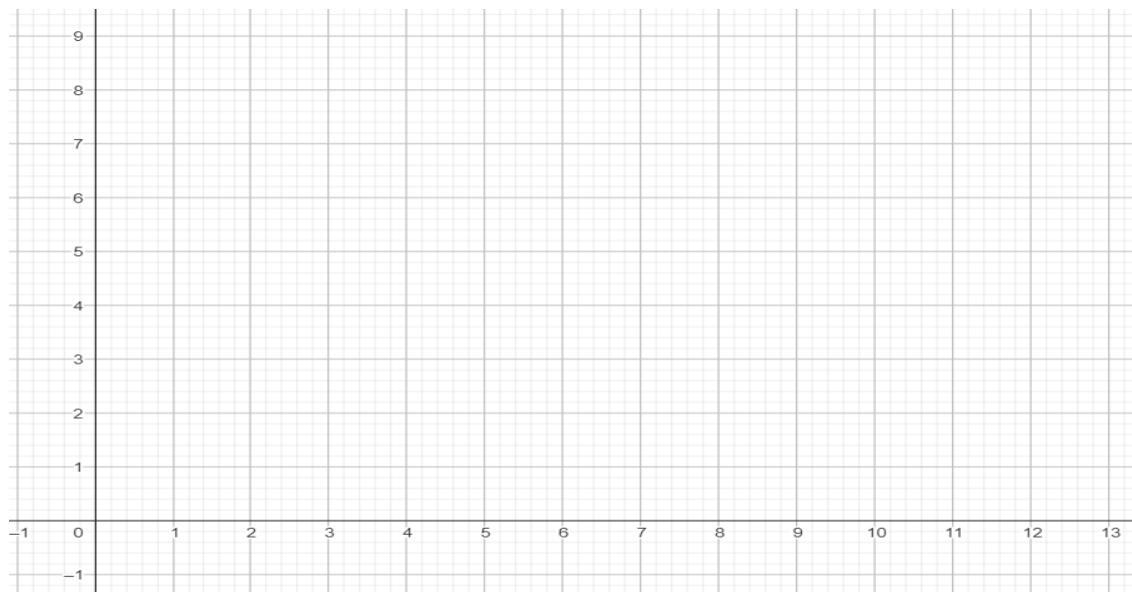
- 4) En una circunferencia ubicada en el plano cartesiano, los extremos de uno de sus diámetros son $L(-4, 5)$ y $M(2, -3)$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia?

F. Traslade las siguientes circunferencias a los puntos que se indican, escribiendo su nueva ecuación.

- 1) Considere la circunferencia dada por la ecuación $(x-3)^2 + (y+3)^2 = 25$. Traslade su centro a $R(0, 4)$.
- 2) ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que se obtiene al trasladar el centro de $x^2 + (y-9)^2 = 4$ al punto $S(-9, -1)$?
- 3) El centro de la circunferencia dada por la ecuación $(x+1)^2 + (y+7)^2 = 1$ se traslada al punto $T(-2, 6)$. ¿Cuál es la ecuación de la nueva circunferencia?
- 4) ¿Cuál es la representación algebraica de la circunferencia que se obtiene al trasladar el centro de $x^2 + y^2 = 3$ al punto $V(2, 2)$?

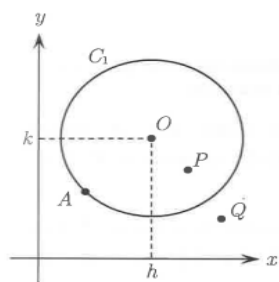
Lea con atención el siguiente problema:

Si un radar detecta aviones que se ubican a una distancia máxima de 3km a la redonda y su centro está ubicado 5km al norte y 8km al este de la estación central (centro del plano cartesiano), podrá detectar un avión que se ubica 2 km al norte y 3km al este de la estación central del aeropuerto. Realice una representación gráfica del problema para darle solución.



Puntos en la Circunferencia

Cuando se traza una circunferencia en el plano cartesiano, es posible determinar si existen puntos que pertenecen a la circunferencia, o si existen puntos que se ubican en el interior o el exterior de ella. Veamos esto gráficamente:



- A pertenece a C_1
- P es interior a C_1
- Q es exterior a C_1

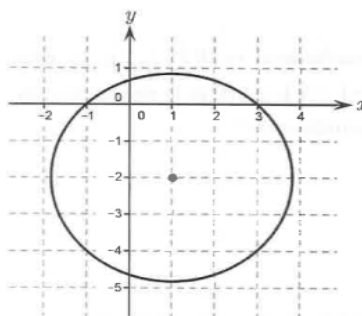
Algebraicamente, si consideramos la circunferencia de centro $O(h, k)$ y el punto $P(x, y)$, se cumple que:

- Si $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ entonces P es un punto de la circunferencia (i.e. pertenece a la circunferencia).
- Si $(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$ entonces P es un punto interior de la circunferencia.
- Si $(x - h)^2 + (y - k)^2 > r^2$ entonces P es un punto exterior de la circunferencia.



⇒ EJEMPLO.

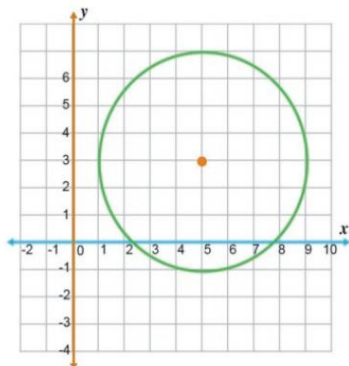
La señal inalámbrica del internet de la biblioteca tiene un alcance circular, descrito en el plano cartesiano por la ecuación $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$. Ana, Roger y Tania se ubican los puntos $A(3, -2)$, $R(3, -4)$ y $T(-2, -5)$, respectivamente. Compruebe gráfica y algebraicamente si estos estudiantes pueden percibir esta señal de internet desde sus teléfonos celulares.



Práctica #3

A. Con base en la gráfica dada, conteste lo que se le solicita.

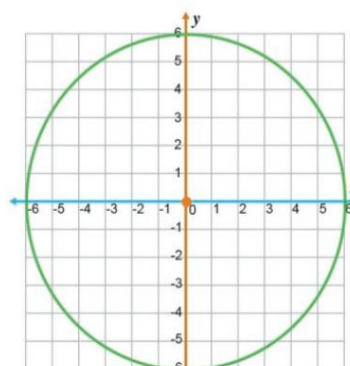
1.



Clasifique los puntos en interior o exterior.

1. A (2,2)
2. B (6,-2)
3. C (6,6)

2.



Anote una posible coordenada para un punto A que sea exterior.

1. Exterior A (,)
2. Interior A (,)
3. Sobre la circunferencia A (,)

B. Determine algebraicamente si los puntos dados se clasifican en interior o exterior.

1. Sea $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 12$ la ecuación de una circunferencia, determine algebraicamente si los puntos A (-1,5) y B (0,-9) se ubican en el interior o exterior de la circunferencia.

2. Sea $(x)^2 + (y+15)^2 = 3$ la ecuación de una circunferencia, determine algebraicamente si los puntos A (-8,0) y B (-1,-14) se ubican en el interior o exterior de la circunferencia.

3. Sea $(x-8)^2 + (y)^2 = 7$ la ecuación de una circunferencia, determine algebraicamente si los puntos A (7,1) y B (6,-1) se ubican en el interior o exterior de la circunferencia.

C. Resuelva los siguientes problemas.

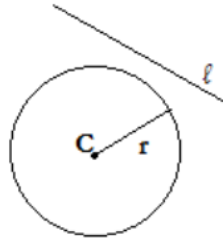
1. Un radar se ubica a 6 km al sur y 5 km al este de un pueblo cercano y tiene un alcance máximo de 3 km a la redonda. Si un avión se encuentra a 3 km al norte y 2 km al oeste del centro del radar, ¿este lo podrá detectar?

2. Un sismo se originó a 5 km al este y 10 km al norte de un pueblo en Cartago, y sus ondas tuvieron una afectación de 6 km a la redonda, si otro pueblo vecino se ubica a 3 km al este y 3 km al sur del lugar donde se originó el sismo, ¿está dentro de la zona de afectación?

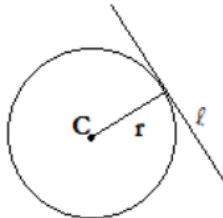


Tipos de Rectas en la circunferencia:

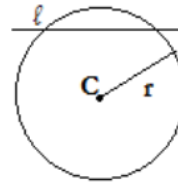
Si una circunferencia y una recta están en el mismo plano, las siguientes son las posiciones relativas que se pueden dar entre ellas:



Recta exterior: la recta exterior a una circunferencia no tiene puntos en común con la circunferencia.



Recta tangente: la recta tangente a una circunferencia interseca a la circunferencia en un solo punto.

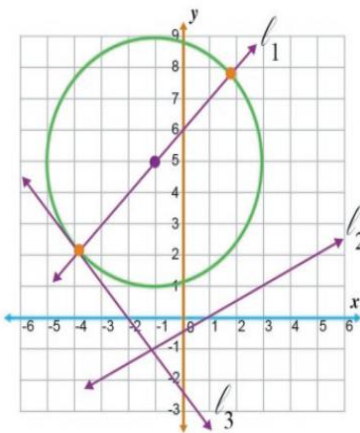


Recta secante: la recta secante a una circunferencia interseca a la circunferencia en dos puntos distintos.

Práctica #4

A. Clasifique las rectas dadas en las siguientes gráficas en tangentes, secantes o exteriores a cada circunferencia.

1.

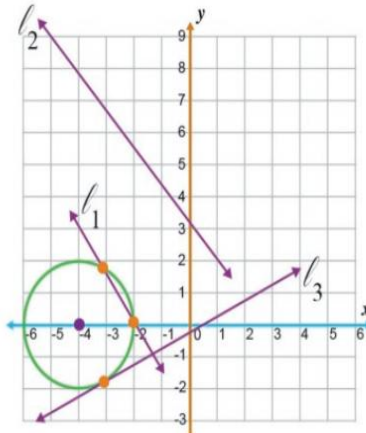


l_1 : _____

l_2 : _____

l_3 : _____

2.

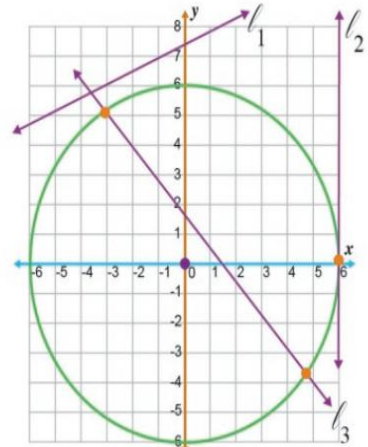


l_1 : _____

l_2 : _____

l_3 : _____

3.



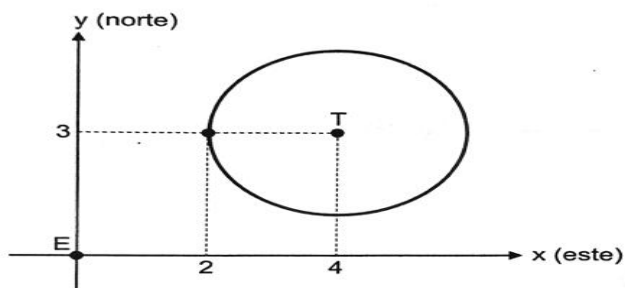
l_1 : _____

l_2 : _____

l_3 : _____

B) Resuelva los siguientes ejercicios:

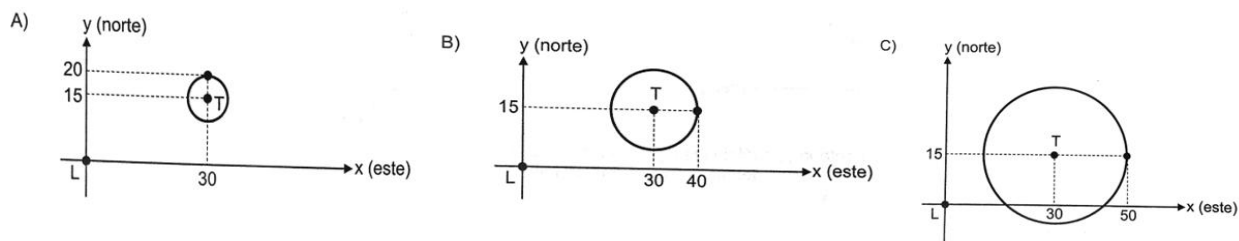
- 1) La siguiente representación gráfica, en la que las unidades están en kilómetros, muestra la ubicación de la entrada de un parque nacional (E), de un dispositivo transmisor-receptor (T) y de la circunferencia que corresponde al alcance máximo de la señal que emite ese dispositivo:



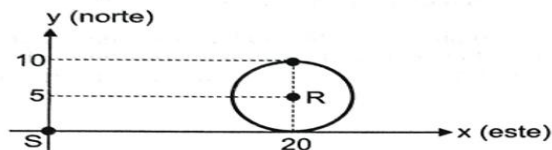
De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de las siguientes representaciones, en la que las unidades están en kilómetros, algebraicas corresponde al alcance máximo de la señal que emite ese dispositivo?

- A) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$
 B) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$
 C) $(x + 4)^2 + (y + 3)^2 = 4$

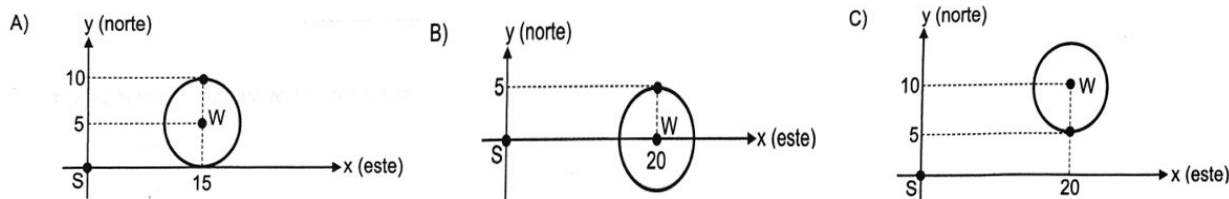
- 2) En un centro educativo se instaló un dispositivo electrónico que emite una señal cuyo alcance máximo es 10 m a su alrededor. La ubicación de ese dispositivo electrónico (T) es 30 m al este y 15 m al norte de la ubicación de una biblioteca (L), la cual se considera como origen. ¿Cuál es la representación gráfica, en la que las unidades están en metros, de la circunferencia que corresponde al alcance máximo de la señal que emite ese dispositivo?



- 3) A continuación, se muestra la representación gráfica, en la que las unidades están en kilómetros, de la ubicación (S) de un puerto, (R) de un barco y de la circunferencia que corresponde al alcance máximo de la señal que emite el radar de ese barco:

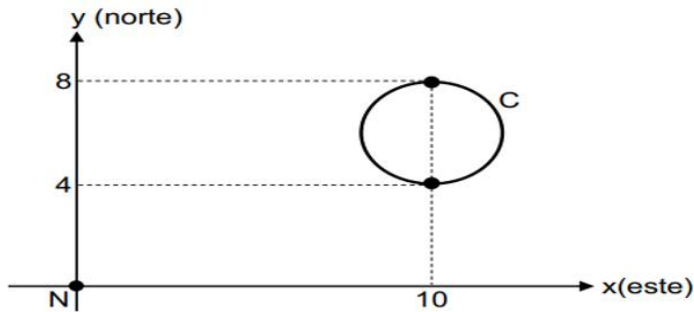


De acuerdo con la información anterior, si una hora después la nueva ubicación (W) del barco es 5 km al oeste de (R), entonces, ¿cuál es la representación gráfica, en la que las unidades están en kilómetros, de la circunferencia que corresponde al alcance máximo de la señal que emite el radar de ese barco en su nueva ubicación?



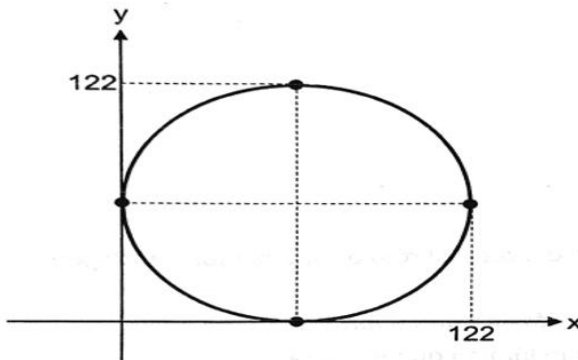
- 4) En un parque nacional hay un sendero, una oficina de guardaparques y un mirador. El sendero tiene forma de línea recta con dirección de este a oeste y pasa por un lugar ubicado a 2 m al norte de esa oficina. Además, el mirador tiene forma circular, cuya medida de su diámetro es 4 m.

La siguiente representación gráfica, cuyas unidades están en metros, muestra las ubicaciones, N de la oficina del guardaparques y C de la circunferencia correspondiente al borde de ese mirador:



De acuerdo con la información anterior, la recta que representa ese sendero es

- A) exterior a C.
 B) secante a C.
 C) tangente a C.
- 5) El tiro con arco es un deporte olímpico en el cual se utiliza un arco para lanzar flechas a un objetivo (diana). La diana tiene forma circular y la medida de su diámetro es 122 cm. A continuación, se muestra la representación gráfica, en la que las unidades están en centímetros, de una diana utilizada en unos Juegos Olímpicos:

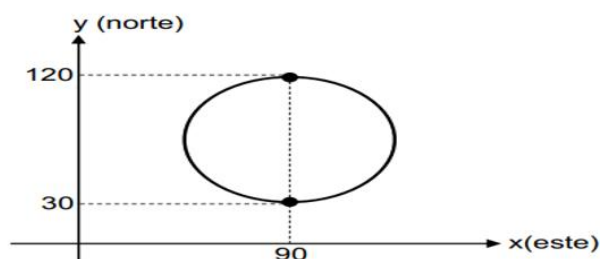


De acuerdo con la información anterior, si durante esos Juegos Olímpicos una persona deportista lanzó tres flechas R, S y T las cuales impactaron, respectivamente, en los puntos que corresponden a (61, 133), (61, 123) y (61, 113), entonces, ¿cuál de esas flechas impactó en el interior de la diana?

- A) R
 B) S
 C) T

6. Un juego consiste en lanzar, con el dedo pulgar de una mano, una bolincha (pequeña esfera de vidrio) a un objetivo con forma circular dibujado en el suelo. La medida del diámetro, de ese objetivo, es 90 cm.

La siguiente representación gráfica, cuyas unidades están en centímetros, muestra ese objetivo circular:



Además, durante un juego Esteban lanzó tres bolinchas, identificadas con las letras K, L y M, las cuales quedaron ubicadas de la siguiente manera:

- K en el punto correspondiente a (40, 70)
- L en el punto correspondiente a (95, 25)
- M en el punto correspondiente a (80, 55)

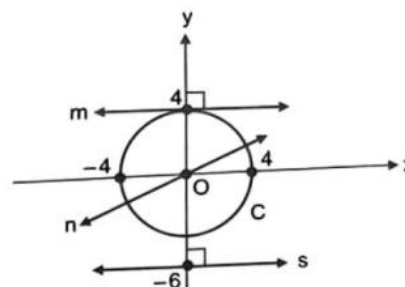
De acuerdo con la información anterior, ¿cuál de esas bolinchas quedó ubicada en el interior de ese objetivo?

- A) K
B) L
C) M

7. Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O y de las rectas m, n y s

De acuerdo con la información anterior, una recta tangente a "C" corresponde a

- A) s
B) m
C) n
D) x



8. Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C de centro O y de las rectas m, n y s

De acuerdo con la información anterior, una recta tangente a C_1 y C_2 corresponde a

- A- s
B- m
C- n
D- x

