

FOLLETO #4: FUNCIONES

DÉCIMO



Centro Educativo: **Colegio Ambientalista el Roble**

Nivel: **Décimo**

Docente: **Alonso Ramirez Abarca**

Asignatura: **Matemática**

Nombre: _____

Sección: _____



Concepto de Función

En el lenguaje cotidiano la palabra *función* tiene muchos significados y diferentes usos. De manera general, diremos que la palabra *función* en matemática tiene un significado que se relaciona con los términos de dependencia y correspondencia.

Tal como hemos estudiado en niveles anteriores, diariamente vivimos situaciones en las que vemos cantidades que dependen de otras. En el problema anterior, por cada cantidad de pasajeros existe una cantidad de ingresos, es decir, el ingreso de TUPSA está en *función* de la cantidad de pasajeros.

Así también podemos afirmar que los ingresos de la empresa son una *variable dependiente*, y la cantidad de pasajeros es una *variable independiente*.

Además, en dicho problema, fue posible asignar una correspondencia (o relación) entre la cantidad de pasajeros y el ingreso obtenido; y esa correspondencia se estableció entre dos conjuntos no vacíos, en la que cada elemento del primer conjunto se relaciona con un único elemento del segundo. Esto nos hace pensar en una definición más formal de función:

Una función es una relación o correspondencia entre dos conjuntos A y B no vacíos, tal que, para todo elemento que pertenece al conjunto A , existe uno y sólo un elemento del conjunto B que se le asocia o le corresponde.

Simbólicamente, se si se ha definido una función del conjunto A al conjunto B , escribimos:

$$f : A \rightarrow B$$

Las funciones pueden representarse de tres maneras diferentes:

Representación Tabular: Consiste en representar los valores de las variables en una tabla, que debe indicar qué letra representa cada variable y las unidades de medida.

Tiempo x (en segundos)	1	2	3	4	5	6
Distancia D (en metros)	3	6	9	12	15	18

Representación Algebraica: Corresponde a la expresión algebraica que permite relacionar las variables. A esta expresión se le conoce como *criterio de la función*.

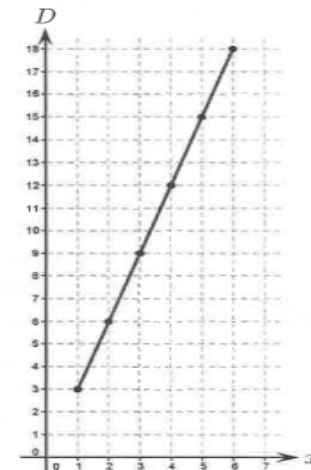
$$D(x) = 3x$$

Representación Gráfica:

Consiste en graficar en un sistema de coordenadas cada uno de los pares ordenados que resultan de asociar las variables. Notemos que pueden formarse diferentes figuras en el trazo, de acuerdo a la ubicación de los pares ordenados.

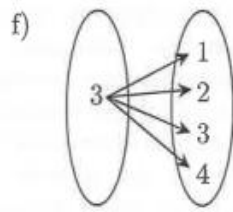
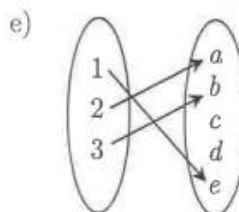
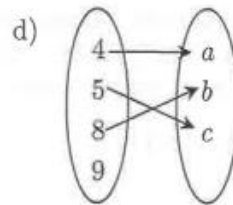
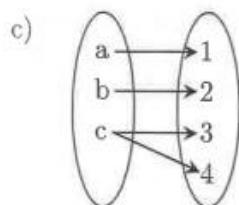
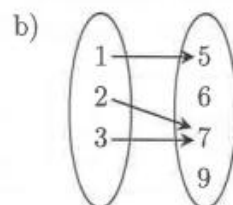
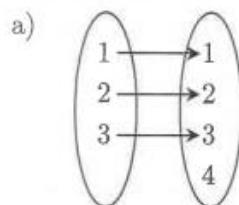


En cualquier representación que se muestre una relación, es posible determinar si es o no una función.



⇒ EJEMPLOS.

- 1) Determine si los siguientes diagramas de Venn definen una función.



Observe que:

- A cada elemento del primer conjunto se le asocia un solo elemento del segundo conjunto, o sea, en el primer conjunto no pueden relacionarse más de una vez.
- En el segundo conjunto pueden sobrar elementos, pero en el primero no.

- 2) ¿Corresponde a una función la relación que se muestra en la siguiente tabla?

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	4	9	16	25

- 3) ¿En la siguiente relación existe la función $f : A \rightarrow B$?

$$A \times B = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 4), (4, 5)\}$$

4) Determine si las siguientes relaciones son funciones.

a) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = 3x$

b) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad g(x) = x^2 - 1$

c) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; \quad h(x) = \sqrt{x}$

d) $f : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}; \quad f(x) = x - 5$

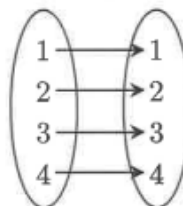


Desde tiempos antiguos, ya se trabajaba con el concepto de dependencia de cantidades. Por ejemplo, Arquímedes (287 – 212 a.C.) relacionó el peso de un objeto con el volumen del agua desplazada por dicho objeto.

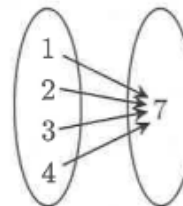
Práctica #1

A. Determine si los siguientes diagramas definen una función.

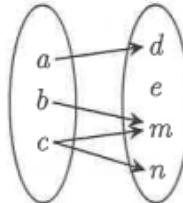
1)



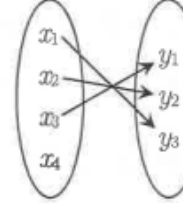
2)



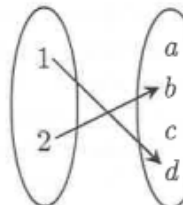
3)



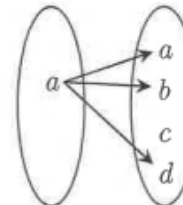
4)



5)



6)



B. Determine si las siguientes relaciones determinan una función.

- 1) $A \times B = \{(1, 20), (2, 10), (3, 5), (4, 3), (5, 5)\}$
- 2) $A \times B = \{(1, 1), (-2, 3), (3, 1), (-4, 4), (-2, 5)\}$

C. Represente en forma tabular, algebraica y gráfica la función que representa el siguiente problema.

La tarifa T por utilizar x minutos de cierto servicio de video llamada está modelado por la función $T(x) = 50x + 3277$. Represente los montos de las tarifas desde un minuto hasta 10 minutos.

D. Determine si las siguientes relaciones son funciones.

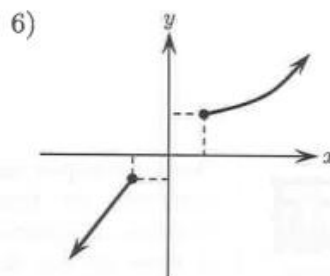
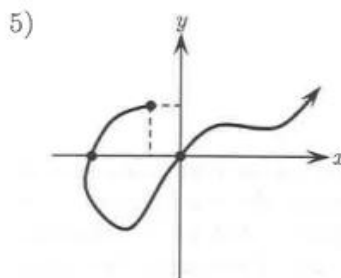
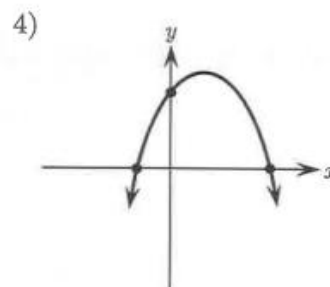
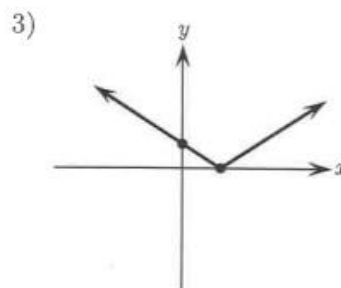
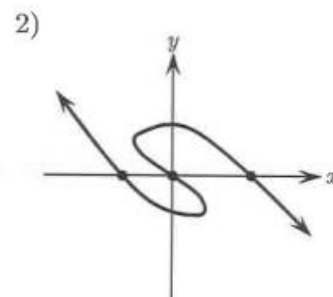
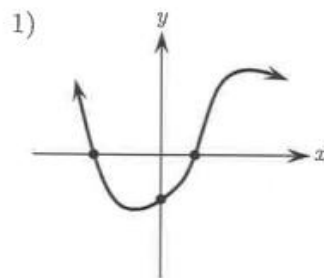
- 1) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+; f(x) = x + 7$
- 2) $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}; g(x) = \frac{x}{4}$
- 3) $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{Z}; h(x) = x^2$
- 4) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; f(x) = x^3$
- 5) $g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}^+; g(x) = x^2 - 2$
- 6) $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}; h(x) = \sqrt{x + 4}$

E. Investigue lo que se solicita en el siguiente texto.



Otros matemáticos que estudiaron las relaciones de dependencia entre cantidades fueron los Pitagóricos. Al construir instrumentos musicales como el arpa, intentaron establecer la relación entre las notas musicales y la longitud de las cuerdas que las emiten. Investigue un poco más acerca de esta relación conocida como “La Teoría de Armonía Musical de Pitágoras”.

F. Para cada una de las siguientes gráficas, escriba SÍ si la gráfica corresponde a una función f tal que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y escriba NO si no lo es.





La empresa "Ropa & Hogar" estima que el costo semanal " C " en dólares de producir " x " cantidad de edredones, está dado por la función $C(x) = 3x + 11$.

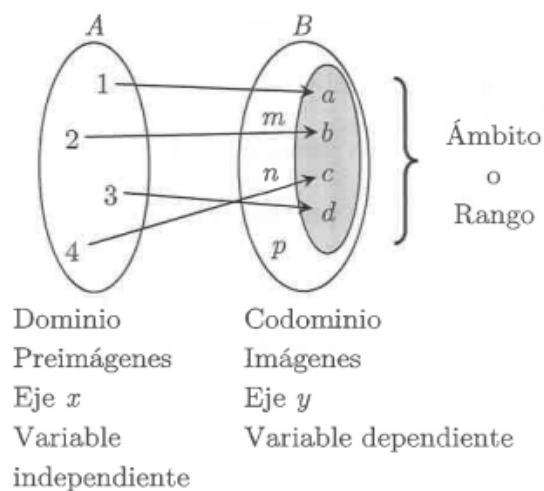
- ¿Cuánto dinero le cuesta a la empresa producir 500 edredones?
- ¿Cuántos edredones produjo la empresa si la semana pasada tuvo un costo total de \$2261?



Elementos de una Función

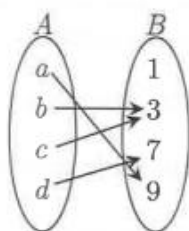
Una vez que determinamos que una relación satisface la definición de función, podemos determinar sus diferentes elementos, en cualquiera de las notaciones que se represente:

- ❖ El conjunto de partida (A) se denomina *dominio*.
- ❖ El conjunto de llegada (B) se denomina *codominio*.
- ❖ Los elementos que pertenecen al dominio se denominan *preimágenes*.
- ❖ Los elementos del codominio que fueron asociados en la función se denominan *imágenes*.
- ❖ El conjunto formado por todas las imágenes se denomina *ámbito o rango* de la función y es un subconjunto del codominio.



⇒ EJEMPLOS. Para cada función determine lo que se le solicita.

1)



Dominio _____

Codominio _____

Ámbito _____

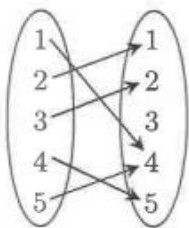
La imagen de a _____

La preimagen de 7 _____

La imagen de b _____

La preimagen de 9 _____

2)



Dominio _____

Codominio _____

Ámbito _____

La imagen de 4 _____

La preimagen de 2 _____

La imagen de 1 _____

La preimagen de 1 _____

Cálculo de Imágenes y Preimágenes



Tal como hicimos en el problema de la página anterior, podemos calcular imágenes y preimágenes de una función, conociendo su criterio o representación algebraica.

⇒ EJEMPLOS.

1) Sea $f(x) = 3x^2 + 5$. Calcule la imagen de -2 .

2) Sea $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Calcule $f(-1)$.

3) Sea $f(x) = 3x^2 - 2x + \frac{1}{3}$. Calcule la imagen de $\frac{3}{7}$.

4) Sea $f(x) = 5x + 13$. Calcule la preimagen de -3 .

5) Si $f(x) = 3x^2 - 7$, ¿cuántas preimágenes tiene el número 20?

6) ¿Cuál es la preimagen de 6 si $f(x) = \frac{2-x}{x-4}$?

Cálculo de Dominio y Ámbito



Ahora veamos cómo se calcula el ámbito y el dominio de una función a partir de su criterio, para ello recordemos:



DOMINIO $\rightarrow$ contiene $\rightarrow$ PREIMAGENES

ÁMBITO $\rightarrow$ contiene $\rightarrow$ IMAGENES

$\Rightarrow$ EJEMPLOS.

1) Sea $f : \{-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x - 3$. Calcule el ámbito de f .

2) Sea $f : A \rightarrow \{2, 5, 18\}$ con $f(x) = 4x - 1$. Determine el dominio de f .

3) Sea $f : [0, 9[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x + 5$. Determine el rango de f .

4) Sea $g : D \rightarrow]-22, 8]$, definida por $g(x) = 5x - 7$. Determine el dominio de g .

- 5) Si la función f está definida por $f(x) = -2x$, ¿cuál es el ámbito de f si su dominio es $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right]$?



¿El conjunto $\{7, 8, 9, 10\}$ es igual que el conjunto $[7, 10]$?



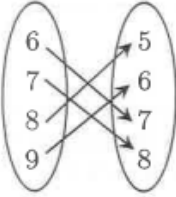
Recuerde:

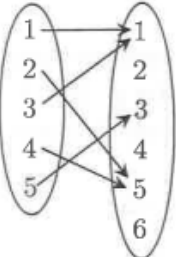
- Para calcular una imagen, se debe sustituir x por el valor dado y resolvemos las operaciones que se establecen en el criterio de la función.
- Para calcular una preimagen, se debe plantear una ecuación y despejar x para hallar su(s) valor(es).
- Cuando se hace referencia a la imagen de 5, (por ejemplo) simbólicamente se representa así:
 $f(5)$
- También podemos referirnos a las imágenes con la letra y . Esto implica que $f(x) = y$, por lo tanto, el criterio de una función puede definirse de dos formas:

$$f(x) = 5x^2 - 3 \quad \text{ó} \quad y = 5x^2 - 3$$

Práctica #2

A. De acuerdo con los diagramas, escriba lo que se le solicita.

1)  Dominio _____
Codominio _____
Ámbito _____
La imagen de 7 _____
La preimagen de 6 _____
La imagen de 6 _____
La preimagen de 7 _____

2)  Dominio _____
Codominio _____
Rango _____
La imagen de 2 _____
La preimagen de 3 _____
La imagen de 3 _____
Una preimagen de 1 _____

B. Encuentre el valor de las imágenes y las preimágenes que se indican en cada caso.

1) Sea $f(x) = 2x - 3$. Calcule $f(5)$ y $f(-6)$.

2) Sea $f(x) = \frac{3}{x}$. Calcule $f\left(\frac{-3}{2}\right)$ y la imagen de -9 .

3) Sea $f(x) = 1 - 6x$. Calcule la preimagen de 1 y la preimagen de $\frac{1}{6}$.

4) Sea $f(x) = \frac{3}{6-x}$. Calcule la preimagen de 2 y la preimagen de -1 .

5) Sea $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Calcule la imagen de 3 y la preimagen de 4 .

6) Calcule $f\left(\frac{1}{4}\right)$ y la preimagen de $\frac{-3}{4}$ en $f(x) = \frac{3+x}{x-2}$.

C. Resuelva los siguientes problemas.

1) ¿Pertenece el par ordenado $(-5, -46)$ al gráfico de la función $f(x) = 7x - 11$? ¿Por qué?

2) ¿Cuál debe ser el valor de " k " para que el par ordenado $(-4, k)$ pertenezca al gráfico de $f(x) = -x^2 + 4x - 71$?

3) ¿Cuál debe ser el valor de " k " para que el par ordenado $(k, 12)$ pertenezca al gráfico de $f(x) = x + 312$?

D. Encuentre el dominio y el ámbito (o rango) según se indica en cada caso.

1) Sea $f : D \rightarrow]-5, 3]$ definida por $f(x) = 4 - 3x$.
Calcule el dominio de f .

2) Sea $f : [3, 4[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 1$.
Determine el ámbito de f .

3) Sea $f : D \rightarrow]1, 2[$ definida por $f(x) = \frac{2}{1-x}$.
Calcule el dominio de f .

4) Sea $g : \left] \frac{-1}{3}, 2 \right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + x - 5$.
Determine el dominio, codominio y rango de g .

5) Sea $f : D \rightarrow \{3, 5, 7, 9\}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$.
Calcule el dominio de f .

6) Sea $f : \{0, 1, 4, 9, 16\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x}$.
Determine el dominio, codominio y ámbito de f .



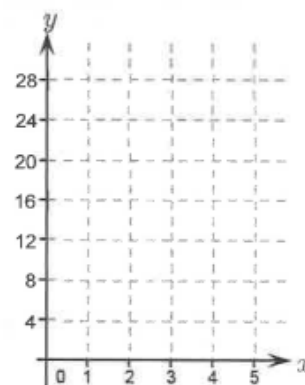
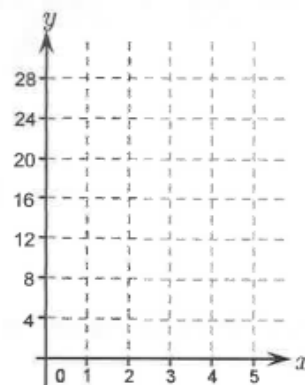
El concepto de función evolucionó un poco durante los siglos XV y XVI, pues se vieron influenciados por el desarrollo del álgebra simbólica por François Viète (1540 - 1603) y los experimentos de Galileo Galilei (1564 - 1642), mediante los cuales logró expresar relaciones entre distancia o velocidad versus tiempo, y en lenguaje de proporciones mediante el cálculo de imágenes y algoritmos similares a los que resolvimos en esta sección.

E. Considere las funciones:

$$f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = x^2$$

$$g : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = x^2$$

- 1) ¿Puede afirmarse que el dominio de f es igual al dominio de g ? ¿Por qué?
- 2) Grafiquelas en los sistemas de coordenadas que se muestran a continuación, y establezca semejanzas y diferencias con respecto a sus gráficas.

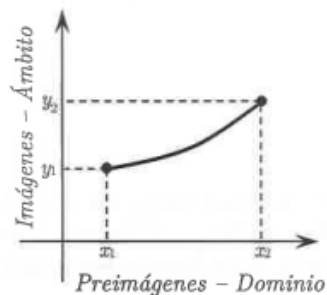




Análisis de la Gráfica de una Función

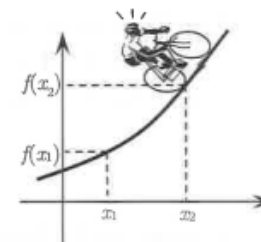
Con la representación gráfica de una función, es posible determinar dominio, ámbito, imágenes, preimágenes y otros elementos de dicha función. Para un análisis completo de la gráfica de una función, debemos considerar los siguientes aspectos.

- **Dominio:** es el intervalo que se localiza en el eje x , formado desde el menor y hasta el mayor valor de x que se relaciona con algún valor de y por medio de la gráfica.
- **Ámbito:** está formado por el intervalo cuyos extremos son el menor y mayor valor de la gráfica de la función en el eje y .
- **Preimagen:** corresponde a la primera coordenada de un par ordenado, es decir, el valor que tome un punto en el eje x .
- **Imagen:** corresponde a la segunda coordenada de un par ordenado, es decir, el valor que tome el un punto en el eje y .

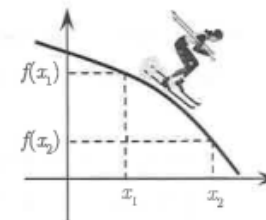


- **Régimen de variación:** Se refiere al aumento o la disminución de la variable dependiente con respecto a la independiente:

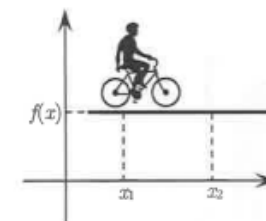
- Se dice que f es una función **creciente** si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.



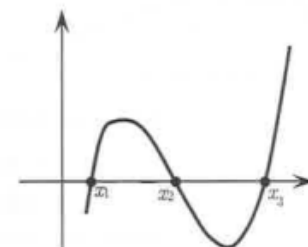
- Se dice que f es una función **decreciente** si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.



- Se dice que f es **constante** si $f(x_1) = f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$.

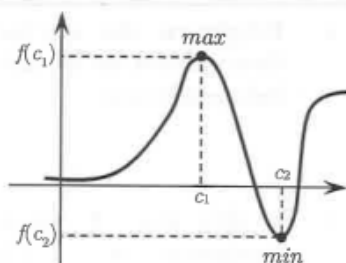


- **Ceros o raíces:** corresponde a los valores donde la gráfica interseca el eje x , es decir, todos los x tales que $f(x) = 0$.



➤ **Máximo:** es el valor c del eje x tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo x del dominio.

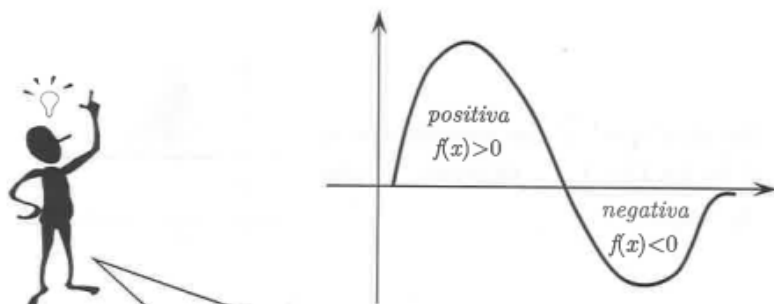
➤ **Mínimo:** es el valor c del eje x tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo x del dominio.



➤ **Signos de la función:** Se refiere al signo que toman las imágenes en los diferentes intervalos del dominio.

• Se dice que f es **positiva** en un intervalo I si $f(x) > 0$ siempre que $\forall x \in I$ (por encima del eje de las abscisas).

• Se dice que f es **negativa** en un intervalo I si $f(x) < 0$ siempre que $\forall x \in I$ (por debajo del eje de las abscisas).

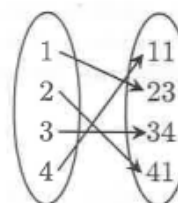


Recuerde los nombres de los ejes de coordenadas:

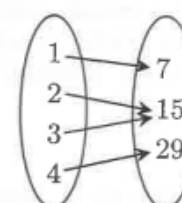
x : eje de las abscisas

y : eje de las ordenadas.

➤ **Inyectividad:** Se dice que una función es *inyectiva* si a elementos diferentes del dominio, siempre les corresponden imágenes diferentes en el ámbito. Es decir, si cada elemento del ámbito tiene una única preimagen.



Inyectiva



No inyectiva

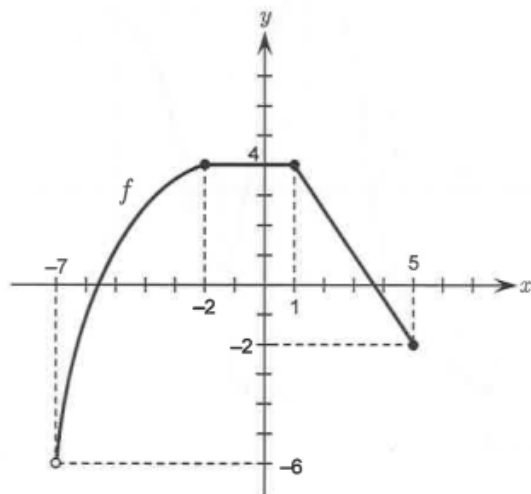
Para saber si una función en su notación gráfica es inyectiva, trazamos líneas horizontales, y si éstas cortan la gráfica en más de un punto, entonces la función no es inyectiva:



Podemos analizar todos los aspectos anteriores en una sola gráfica, utilizando los intervalos y conjuntos que ya hemos estudiado.

⇒ EJEMPLOS. En cada gráfica, escriba lo que se indica:

1)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

El intervalo donde f es constante _____

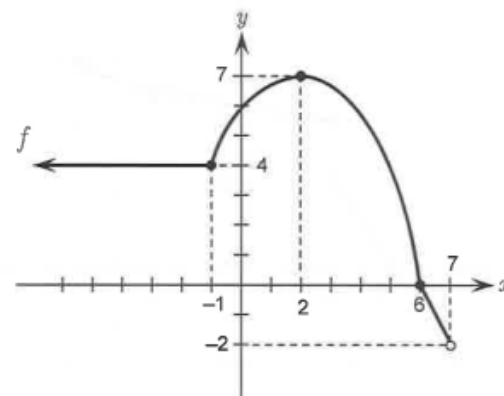
La preimagen de -2 _____

La imagen de -2 _____

El valor de $f(5)$ _____

Un máximo de f _____

2)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

El intervalo donde f es constante _____

La imagen de 7 _____

Una preimagen de 4 _____

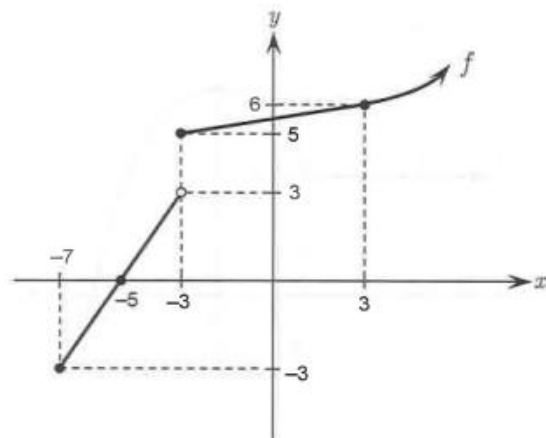
El máximo de f _____

Los ceros de f _____

El intervalo donde $f(x) > 0$ _____

El intervalo donde $f(x) < 0$ _____

3)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

La imagen de 3 _____

La imagen de -3 _____

Un cero de f _____

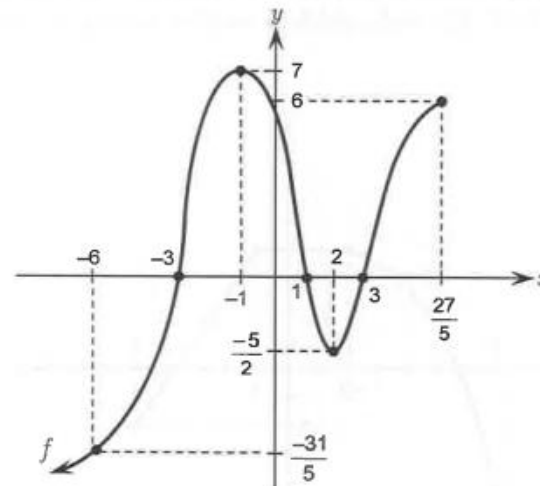
El mínimo de f _____

El intervalo donde f es positiva _____

El intervalo donde f es negativa _____

¿Es f inyectiva? _____

4)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

-1 es preimagen de _____

6 es imagen de _____

Los ceros de f _____

El máximo de f _____

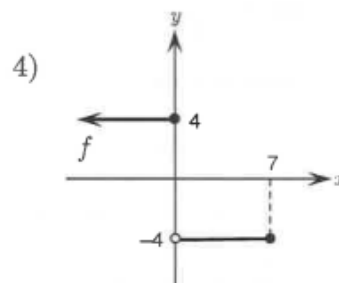
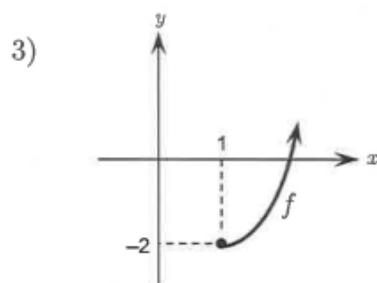
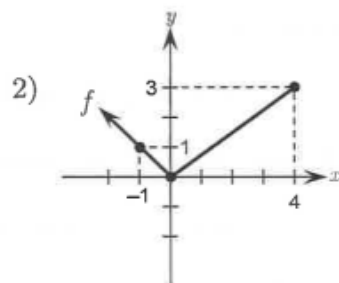
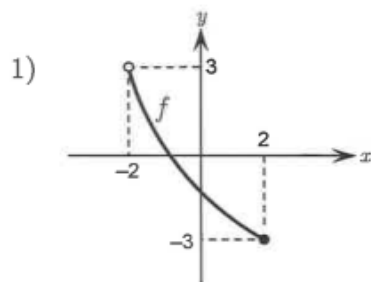
El valor de $f(-6)$ _____

Un intervalo donde $f(x) > 0$ _____

¿Es f inyectiva? _____

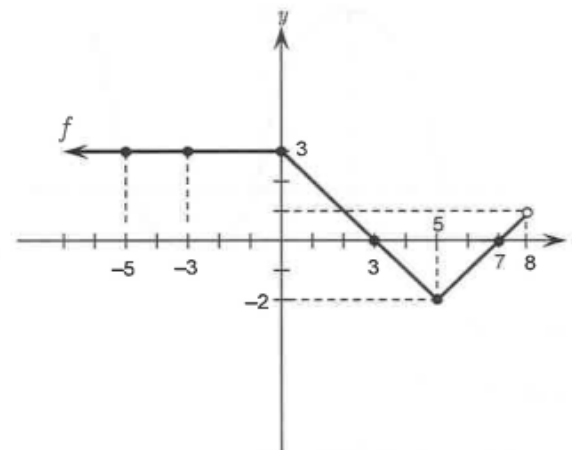
Práctica #3

A. Indique el dominio y el ámbito de las siguientes funciones. Además indique si son inyectivas.



B. Para cada una de las siguientes gráficas, determine lo que se le solicita en cada caso.

1)



El dominio de f

El ámbito de f

El intervalo donde f es creciente

El intervalo donde f es decreciente

El intervalo donde f es constante

Los ceros de f

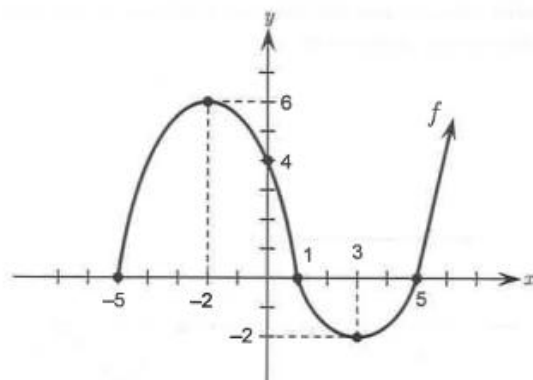
El mínimo de f

Un máximo de f

La imagen de 3

¿Es inyectiva la función f ?

2)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

La imagen de -2 _____

La imagen de 3 _____

La preimagen de 4 _____

Los ceros de f _____

El máximo de f _____

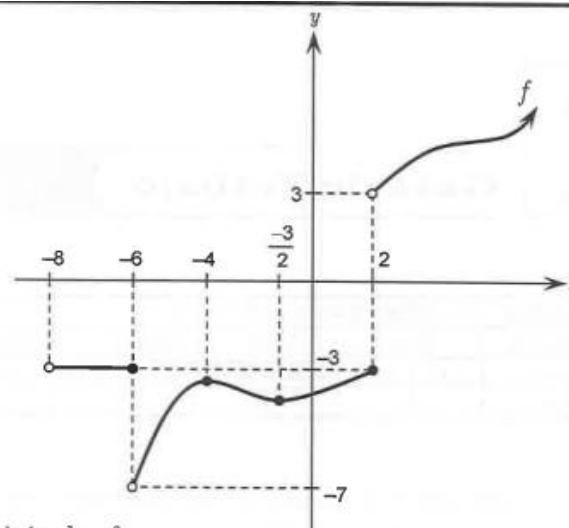
El mínimo de f _____

El intervalo donde f es positiva _____

El intervalo donde f es negativa _____

¿Es f inyectiva? _____

3)



El dominio de f _____

El ámbito de f _____

El intervalo donde f es creciente _____

El intervalo donde f es decreciente _____

El intervalo donde f es constante _____

El mínimo de f _____

la imagen de $-\frac{15}{2}$ _____

-6 es preimagen de _____

2 es preimagen de _____

El intervalo donde $f(x) > 0$ _____

El intervalo donde $f(x) < 0$ _____



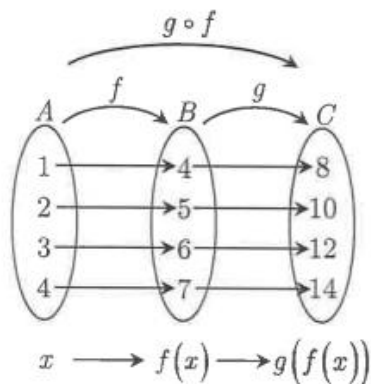
Composición de Funciones

En las situaciones que modelan algunas funciones, existe una dependencia de una variable con otra, y esta última a su vez depende de una tercera variable.

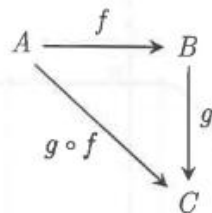
La *composición de funciones* consiste en aplicar una función a las imágenes de otra función. Es decir, si tenemos las funciones f y g tales que $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, llamaremos la composición de f y g a la función:

$$g \circ f: A \rightarrow C \text{ tal que } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Para explicar mejor este tipo de relación entre funciones, vamos a considerar la función $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x$. De sus criterios podemos deducir el siguiente diagrama y definir $g \circ f$:



De este diagrama, podemos deducir el dominio y el ámbito de cada una de las funciones:



Dominio de f : _____

Dominio de $g \circ f$: _____

Ámbito de f : _____

Ámbito de $g \circ f$: _____

Dominio de g : _____

Ámbito de g : _____



Además, podemos completar las imágenes de cada función en el siguiente cuadro:

x	1	2	3	4
$f(x)$				
$g(x)$				
$(g \circ f)(x)$				

También podemos determinar los criterios de las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ conociendo los criterios de $f(x)$ y $g(x)$.

⇒ EJEMPLOS.

- 1) Considere las funciones del caso anterior, $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x$. Calcule el criterio de $(g \circ f)(x)$ y compruebe los resultados de las imágenes obtenidas en el cuadro anterior.

- 2) Considere las funciones $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x^2 - 9$. Calcule el criterio de $(g \circ f)(x)$.

- 3) Considere las funciones $f(x) = 2 - 3x$ y $g(x) = x^2 + 1$.

- a) Calcule el criterio de la función $(f \circ g)(x)$.

- b) Determine el valor de $(g \circ f)(2)$.



Definición de Función Lineal

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **función lineal**, si su criterio es de la forma

$$f(x) = mx + b, \quad m, b \in \mathbb{R}$$

En el plano cartesiano su gráfica describe una línea recta, y como $f(x) = y$, con frecuencia esta ecuación se escribe de la siguiente manera

$$y = mx + b, \quad m, b \in \mathbb{R}$$

A esta expresión también se le conoce con el nombre de **ecuación de la recta**. En ella, el número m se llama **pendiente**, y el número b se llama **ordenada al origen**.

Son ejemplos de funciones lineales:

a) $f(x) = 2x - 6$ c) $y = 5x - 2$ e) $y = x + 2$

b) $f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{1}{3}$ d) $y = \frac{3x - 5}{2}$ f) $2x + 4y = 1$

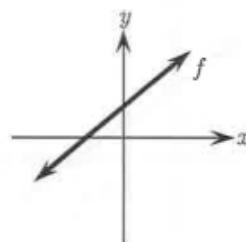
En todas las ecuaciones anteriores, su gráfica describe una línea recta.

Por lo general, a menos que en un ejercicio se indique lo contrario, el dominio, el codominio y el ámbito de una función lineal es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, excepto en el caso de la función constante. A continuación estudiaremos otras características de la función lineal.

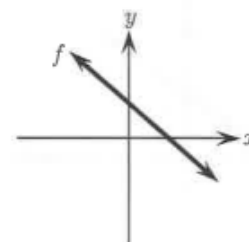
Pendiente de una Función Lineal

Con respecto a la pendiente (m), toda función lineal cumple con las siguientes características:

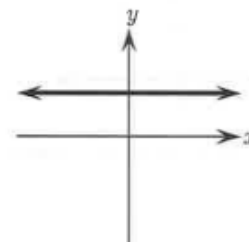
- Si $m > 0$ entonces f es creciente.
- Si $m < 0$ entonces f es decreciente.
- Si $m = 0$ entonces f es constante.



$$m > 0$$



$$m < 0$$

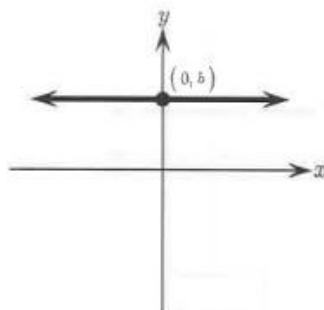
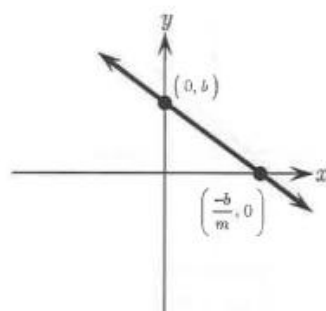
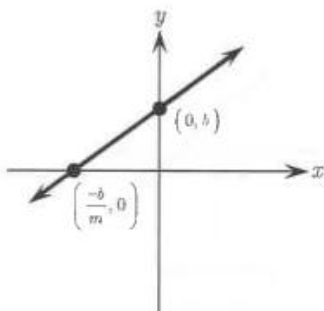


$$m = 0$$

Intersección con los Ejes

La gráfica de toda función lineal cuya pendiente sea distinta de cero, interseca a cada uno de los ejes del plano cartesiano de la siguiente manera.

- Interseca al eje y en el punto $(0, b)$.
- Interseca al eje x en el punto $(-\frac{b}{m}, 0)$.



⇒ EJEMPLOS.

Para cada una de las siguientes funciones lineales indique el valor de “ m ”, el valor de “ b ”, el régimen de variación y las intersecciones con los ejes.

1) $f(x) = 5x + 10$ $m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

2) $f(x) = -x + 3$ $m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $f(x) = 5x - 6$ $m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

4) $y = \frac{9 - 2x}{3}$ $m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

5) $y = 7x$

$m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

6) $y - 8 = 6x$

$m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

7) $3x + 2y = -4$

$m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$

8) $f(x) = 15$

$m = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

Variación: $\underline{\hspace{2cm}}$

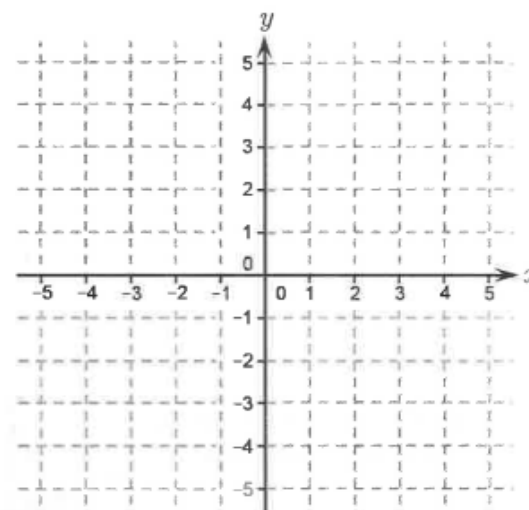
$\cap_x = \underline{\hspace{2cm}}$ $\cap_y = \underline{\hspace{2cm}}$



Para graficar una función lineal, basta con determinar las intersecciones con los ejes de coordenadas.

9) Grafique:

$f(x) = 2x - 4.$



Cálculo de la Ecuación de una Recta

Es posible calcular la ecuación de una recta conociendo dos pares ordenados y otras características particulares de la función. Recordemos que la ecuación de una recta es $y = mx + b$, y lo que se busca es encontrar el valor de m y b , para determinar la ecuación:

- La pendiente m se calcula con: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

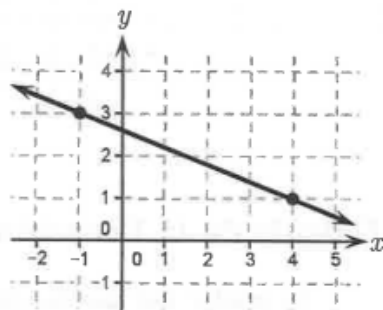
- La ordenada al origen b se calcula con: $b = y - mx$



⇒ EJEMPLOS.

- 1) Calcule la ecuación de la recta que contiene los puntos $(2, 4)$ y $(8, 22)$.

- 2) Calcule la ecuación de la recta que se muestra en la gráfica.



- 3) Si la función lineal f cumple que $f(-3) = 5$ y

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-5}{4}, \text{ ¿cuál es la ecuación de } f?$$

- 4) Si la función lineal f tiene pendiente 2, y contiene el punto $\left(2, \frac{-1}{3}\right)$, ¿cuál es la ecuación de f ?

Práctica #4

A. Complete el siguiente cuadro con los datos solicitados.

Recuerde despejar y para determinar los valores de m y b .

Ecuación	valor de m	valor de b	Régimen de variación	$\cap_x$	$\cap_y$
1) $f(x) = 3x - 36$					
2) $y = 2 - 5x$					
3) $y - 2x = 6$					
4) $f(x) = \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}$					
5) $y = \frac{4 - 7x}{2}$					
6) $5x - 4y = 12$					
7) $5y = 15$					
8) $4x + 2y = 12$					
9) $y = 6x$					
10) $2y - 3 = 6x + 5$					

B. Resuelva los siguientes problemas.

- 1) Determine la ecuación de la recta que contiene los puntos $(4, 5)$ y $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$.



- 2) Determine la ecuación de la recta que contiene los puntos $(1, -4)$ y $(8, -39)$.

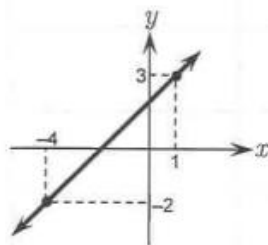
- 3) Si f es una función lineal que cumple que $f(-3) = 4$ y además contiene el origen, ¿cuál es el criterio de f ?

- 4) Si la pendiente de una recta es -5 y contiene el punto $(3, 2)$, ¿cuál es la ecuación de dicha recta?

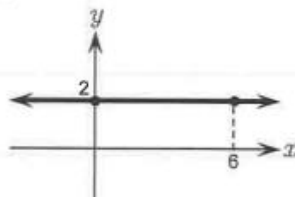
- 5) Se llama **función identidad** a la función lineal cuya imagen es igual a la preimagen, es decir, sus pares ordenados son de la forma $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, etc. ¿Cuál es la ecuación de la función identidad?

C. De acuerdo con los datos de las siguientes gráficas, determine la ecuación de cada recta representada.

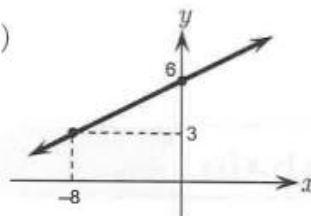
1)



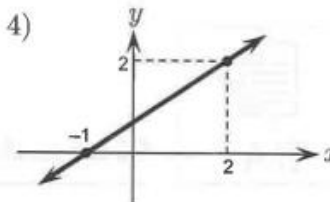
2)



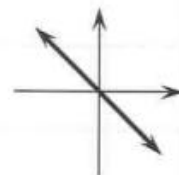
3)



4)



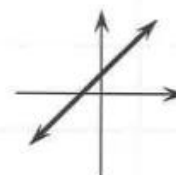
D. En cada una de las siguientes gráficas coloque los signos $>$, $<$ ó $=$ según corresponda. Suponga que todas las gráficas son rectas de la forma $y = mx + b$.



m 0

b 0

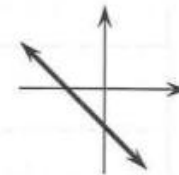
$\frac{-b}{m}$ 0



m 0

b 0

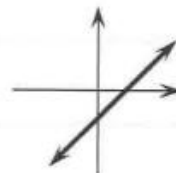
$\frac{-b}{m}$ 0



m 0

b 0

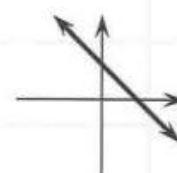
$\frac{-b}{m}$ 0



m 0

b 0

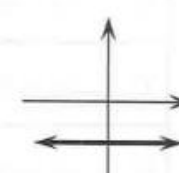
$\frac{-b}{m}$ 0



m 0

b 0

$\frac{-b}{m}$ 0



m 0

b 0



Definición de Función Cuadrática

Una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se llama función cuadrática, si su criterio es de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0$$

Su gráfica en el plano cartesiano describe una parábola, es decir, algo similar a la trayectoria que describe una pelota si la lanzáramos al aire con un cierto grado de inclinación.



Son ejemplos de funciones cuadráticas:

a) $f(x) = 2x^2 + x - 6$ d) $y = x^2 + 3x - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = -3x^2 + 7x - 5$ e) $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{2}$

c) $f(x) = x^2 - 1$ f) $f(x) = (x - 3)^2$

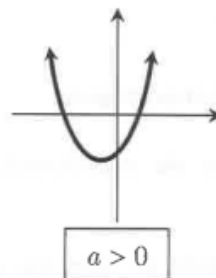
Por lo general, a menos que en un ejercicio se indique lo contrario, el dominio de una función cuadrática es $\mathbb{R}$.

Estudio de la Función Cuadrática

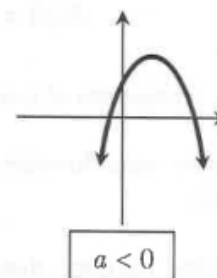
Realizar un estudio completo de una función cuadrática, implica no sólo analizar los cortes con los ejes, pues esto no es suficiente para graficarla, sino que hay que considerar otros aspectos. Veamos.

1) Concavidad:

Si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba.

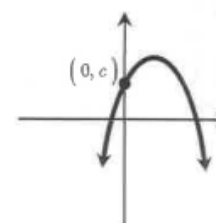
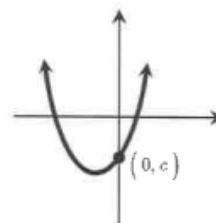


Si $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo.



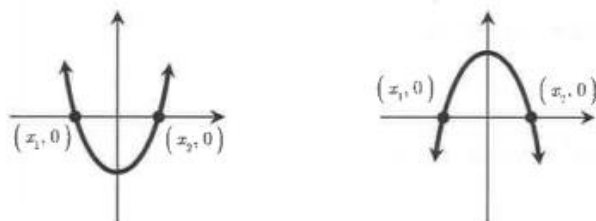
2) Intersección con el eje y :

Siempre es el punto $(0, c)$.



3) **Intersección con el eje x :** Debe calcularse el discriminante (Δ) de la función para determinar cuántas veces interseca al eje x .

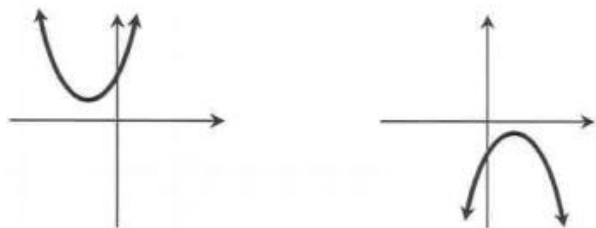
- Si $\Delta > 0$ interseca al eje x en dos puntos diferentes.



- Si $\Delta = 0$ interseca al eje x en un solo punto.



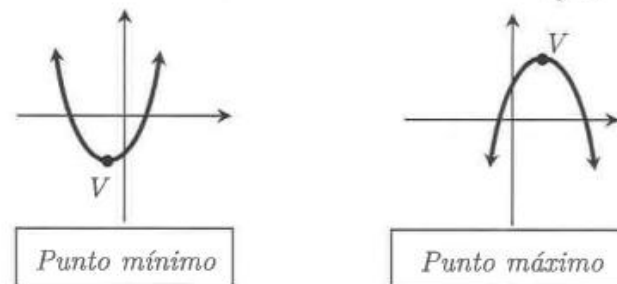
- Si $\Delta < 0$ no interseca al eje x .



Posteriormente, estos puntos se encuentran resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, y corresponden a los pares ordenados

$$(x_1, 0) \quad \text{y} \quad (x_2, 0)$$

4) **Vértice:** Corresponde al par ordenado $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$.



5) **Eje de simetría:** Corresponde a la ecuación $x = \frac{-b}{2a}$.



6) **Gráfica:** Se traza graficando las intersecciones con los ejes, el vértice y el eje de simetría.

7) **Intervalos de monotonía:** Se trata de indicar en qué intervalo (del eje x) la función es creciente y en qué intervalo la función es decreciente. Dichos intervalos coinciden con la **inyectividad** de la función.

8) **Ámbito:** Corresponde a indicar el intervalo (del eje y) que representa el conjunto de imágenes de la función.

9) **Signo:** Consiste en indicar dónde la función es positiva y dónde es negativa.

⇒ EJEMPLOS. 1) Realice el estudio de la siguiente función.

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \quad a = \underline{\hspace{1cm}} \quad b = \underline{\hspace{1cm}} \quad c = \underline{\hspace{1cm}}$$

Concavidad:

Intersección con el eje y :

$$\Delta =$$

Intersección con el eje x :

Vértice:

Eje de simetría:

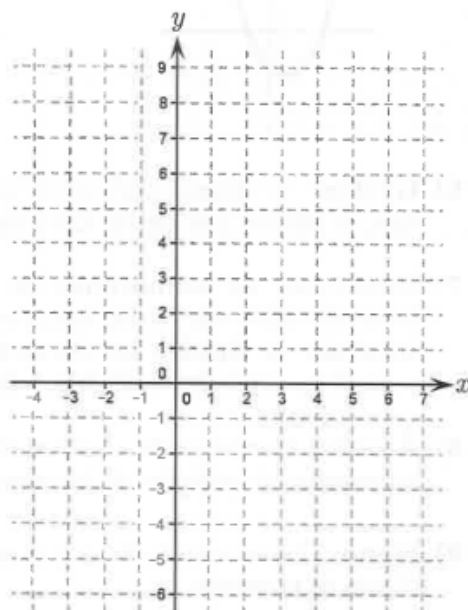
Intervalos de monotonía:

Ámbito:

f positiva:

f negativa:

f inyectiva:



2) Realice el estudio de la siguiente función.

$$f(x) = -2x^2 + 3x + 5 \quad a = \underline{\hspace{1cm}} \quad b = \underline{\hspace{1cm}} \quad c = \underline{\hspace{1cm}}$$

Concavidad:

Intersección con el eje y :

$$\Delta =$$

Intersección con el eje x :

Vértice:

Eje de simetría:

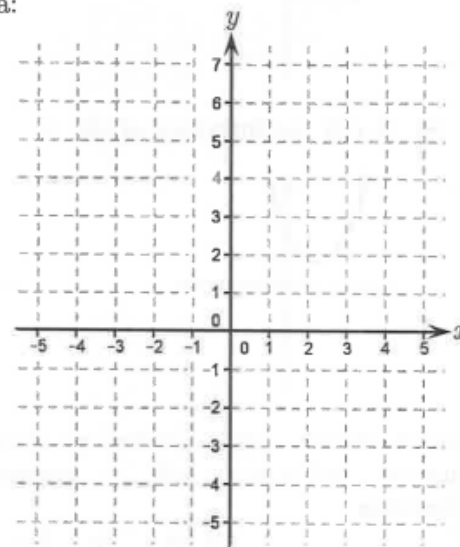
Intervalos de monotonía:

Ámbito:

f positiva:

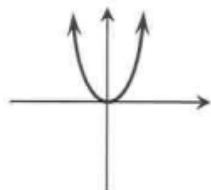
f negativa:

f inyectiva:



- 5) Cada una de las siguientes gráficas corresponden a funciones cuadráticas de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Coloque los signos $<$, $>$ ó $=$ de acuerdo a las características de cada gráfica.

a)

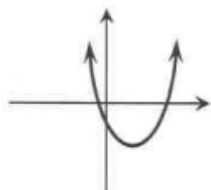


$$a \text{ ___ } 0$$

$$c \text{ ___ } 0$$

$$\Delta \text{ ___ } 0$$

b)

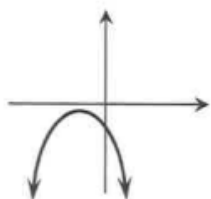


$$a \text{ ___ } 0$$

$$c \text{ ___ } 0$$

$$\Delta \text{ ___ } 0$$

c)



$$a \text{ ___ } 0$$

$$c \text{ ___ } 0$$

$$\Delta \text{ ___ } 0$$

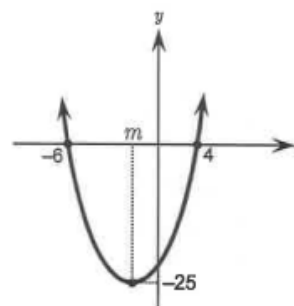
Utilizando el software GeoGebra podemos manipular los valores a , b y c , para así comprender las relaciones anteriores.



- 6) Considere la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 42$.

Realice el estudio completo de la función anterior.

- 7) La siguiente gráfica corresponde a una función cuadrática. Determine el valor m .

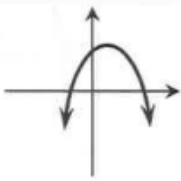
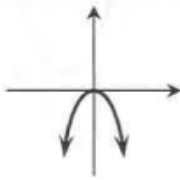
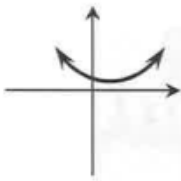
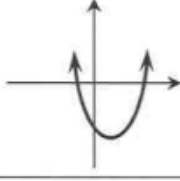


Práctica #5

A. Realice el estudio completo de las siguientes funciones.

- 1) $f(x) = x^2 - 4x - 5$
- 2) $f(x) = -2x^2 + 9x - 9$

B. Complete los espacios con los signos $<$, $>$ ó $=$.

Δ ___ 0 a ___ 0 c ___ 0		Δ ___ 0 a ___ 0 c ___ 0	
Δ ___ 0 a ___ 0 c ___ 0		Δ ___ 0 a ___ 0 c ___ 0	

C. Resuelva los siguientes problemas.

- 1) ¿Cuál es el ámbito de la función dada por $f(x) = x^2 + x - 6$?
- 2) ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de la función dada por $f(x) = (x + 1)^2$?
- 3) ¿Cuál es el ámbito de la función cuyo criterio es $f(x) = -5x^2 + 3x - 2$?
- 4) ¿Cuáles son los intervalos donde la función $f(x) = 4x - x^2 - 3$ es inyectiva?
- 5) La función dada por $f(x) = x(3 - x)$, ¿alcanza un máximo o un mínimo?
- 6) ¿En cuántos puntos interseca el eje x la función dada por $f(x) = \frac{2x^2 - 32}{2}$?



Una empresa de internet ofrece a sus clientes la siguiente tarifa mensual: Un monto fijo de 11000 colones por 6 horas o menos, y a partir de esas 6 horas, cada hora adicional cuesta 100 colones.

- Determine el criterio de la función que modela esta tarifa después de las 6 horas de uso.
- ¿Cuál es la tarifa a pagar por navegar 24 horas?
- Si la tarifa que paga un usuario es de 12500 colones, ¿cuántas horas en total utilizó el servicio?



Problemas con Funciones

Como hemos visto al inicio de cada sección, muchas situaciones pueden ser modeladas matemáticamente utilizando funciones lineales o cuadráticas, lo cual resulta muy provechoso a la hora de resolver problemas.

⇔ EJEMPLOS.

- 1) El costo de producción C de una empresa que produce x periódicos semanales está modelado por la función $C(x) = 400x + 200$.
 - a) ¿Cuál es el costo de producir 25 000 periódicos?
 - b) ¿Cuántos periódicos se produjeron la semana anterior si el costo fue de ₡6 000 200?

Costo: Cantidad de dinero que requiere una empresa para producir un artículo o servicio.

Ingreso: Cantidad de dinero que obtiene una empresa por la venta de un artículo o servicio.



- 2) Un jugador de futbol recibe un salario mensual fijo de €2 500 000, y por cada gol que anote durante ese mes recibe una bonificación de €50 000.
- Determine el criterio de la función que modela el salario de un jugador de futbol de este equipo.
 - Si el salario de un jugador el mes de abril fue de €2 900 000, ¿cuántos goles anotó ese mes?
 - ¿Cuál es el salario de un jugador que anotó 6 goles durante el mes?

Costos fijos: Gastos de una empresa que nunca cambian su valor a pesar del tamaño de la producción.

Costos variables: Gastos que pueden cambiar en forma proporcional, bajo ciertas condiciones.



- 3) El presidente de una compañía productora de lápices personalizados estima que mantener la empresa diariamente sin producir es de €104 000, y cuando se producen 500 lápices es de €234 000. Si el costo C tiene una relación lineal con la producción diaria de x lápices, determine una expresión algebraica que modele la situación anterior.

Utilidad: Ganancia que obtiene una empresa al vender sus productos o servicios.



- 4) El ingreso I en dólares por vender x cantidad de cajas de chocolates rellenos de dulce de leche y maní, está dado por la función $I(x) = -x^2 + 60x$.
- ¿Qué cantidad de chocolates debe producirse para obtener el mayor ingreso posible?
 - ¿Cuál es el ingreso máximo que puede obtenerse por la venta de estos chocolates?

Cuando en un problema se haga referencia a máximos o mínimos, debemos calcular el vértice de la función cuadrática que modela la relación:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 preimagen imagen



Guía de Trabajo

Nombre:

Sección:

() Trabajo Cotidiano.	() Trabajo Extraclase. Fecha entrega:				
Escala de valoración:	Excelente 4	Bueno 3	Regular 2	Deficiente 1	
Indicador	2.23	2.26	2.27	2.28	Total 16
Obtenido					

Resuelva los siguientes problemas. Trabaje en su cuaderno.

- En cierta fábrica, el costo total " C " en colones, de producir " x " artículos a la semana, está dado por $C(x) = 500x + 200\,000$.
 - ¿Cuál es el costo total si esta semana se fabricaron 735 artículos?
 - ¿Cuántos artículos se fabricaron la semana pasada si el costo fue de ₡697 500?
- El costo en colones por alquilar " x " semanas una casa de verano está dado por la función $f(x) = 15\,000 + 22\,500x$.
 - Si se alquila la casa por 3 semanas, ¿cuál es costo del alquiler?
 - Si el dueño de la casa recibió ₡ 105 000 por el alquiler de la misma, ¿cuántas semanas la alquiló?
- La utilidad de una empresa tiene un comportamiento lineal. Al vender 5 artículos su utilidad es \$275, y al vender 8 artículos alcanza \$437 de utilidad. Determine el criterio de la función que modela la utilidad " U " en función de la cantidad de artículos vendidos " x ".

- 4) El contador de una fábrica de borradores estima que el costo de mantener la compañía sin producir ningún borrador es de ₡101 000, y el costo de producir cada borrador es de ₡25.
- Determine el criterio de la función que modela el costo de producción de la fábrica.
 - ¿Cuál es el costo total si la fábrica produce 700 borradores?
 - ¿Cuántos borradores se fabricaron si el costo llegó a ₡151 000?
- 5) Doña Claudia trabaja en una tienda de zapatos. Ahí recibe un salario mensual fijo de ₡110 000, pero además, por cada par de zapatos que venda de la marca "High Heels" recibe ₡5000 adicionales.
- Si en febrero vendió 6 pares de estos zapatos de esa marca, ¿cuál fue su salario ese mes?
 - ¿Cuántos pares de zapatos de dicha marca vendió en marzo si el salario que devengó fue de ₡165 000?
- 6) Un empleado del Ministerio de Hacienda percibe un salario base de ₡602 800 y por cada anualidad recibe ₡11 694 adicionales. Determine el criterio de la función que calcula el salario S con x años de servicio y calcule:
- ¿Cuál es el salario de un trabajador con 10 anualidades?
 - ¿Cuántos años de servicio tiene un trabajador que devenga un salario de ₡918 538?
- 7) La empresa telefónica "Molesttar" ofrece a sus clientes un monto fijo de ₡3000 por una hora o menos, y a partir de la hora, cada minuto adicional cuesta ₡50. Por su parte, la empresa "Clavo" ofrece una tarifa fija de ₡4000 colones y por una hora o menos, y el minuto adicional en ₡30. Si Zobeida realizó llamadas durante 110 minutos el mes de mayo, ¿con cuál de las dos empresas le sale más barato?
- 8) Cuando se lanza al mercado un cierto modelo de teléfono celular, su precio de venta es \$338. Al cabo de 4 años su precio llega a ser \$54. Si suponemos que su depreciación sigue un modelo lineal, ¿cuál es criterio de la función que modela el precio de venta " p " de este teléfono al cabo de " x " años?
- 9) Eustaquio es un comerciante que compra un cuaderno en ₡600 y lo vende en ₡780, y una agenda que le costó ₡800 la vende en ₡1040. Determine el criterio de la función que modela el precio de venta (V) de cada artículo en función de su costo (c), suponiendo que tiene una relación lineal. Además determine cuál es el precio de venta de una caja de crayolas que costó ₡500 y un tajador que costó ₡80.
- 10) La producción P en kilogramos de manzanas de cierta finca está dada por la función $P(x) = 500x - 5x^2$, donde x es el número de árboles por hectárea.
- ¿Cuál es el número de árboles por hectárea que hace que la producción total sea máxima?
 - ¿Cuál es la máxima producción (en kilogramos) que puede obtener?